

# Die Grundlagen der Nomographie

Von

Ing. B. M. Konorski

Mit 72 Abbildungen im Text



Berlin  
Verlag von Julius Springer  
1923

ISBN-13:978-3-642-89971-3 e-ISBN-13:978-3-642-91828-5  
DOI: 10.1007/978-3-642-91828-5

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
§ 1. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	1
§ 2. Die Darstellung einer Funktion einer Variablen mittels Kurve und mittels Skala . . . . .	2
§ 3. Die Potenz- und die logarithmische Skala . . . . .	5
§ 4. Die projektive Skala . . . . .	8
§ 5. Die nomographischen Tafeln mit drei parallelen Skalen . . . .	12
§ 6. Die nomographischen Tafeln mit zwei Parallelen und einer sich schneidenden Geraden . . . . .	17
§ 7. Tafeln mit drei einander schneidenden Geraden . . . . .	20
A. Die Geraden schneiden sich in einem Punkte . . . . .	20
B. Die drei Geraden schneiden sich nicht in einem Punkte . .	23
§ 8. Tafeln mit krummlinigen Skalen. Allgemeine Gleichungen . .	25
§ 9. Die Zentralprojektion einer krummlinigen Skala auf eine Gerade	28
§ 10. Zentralprojektion einer krummlinigen Skala auf eine Kurve .	40
§ 11. Die nomographischen Tafeln mit einer krummlinigen Skala . .	42
§ 12. Die nomographischen Tafeln mit zwei und drei krummlinigen Skalen . . . . .	49
§ 13. Zusammenstellung der Resultate . . . . .	51
§ 14. Die zusammengesetzten Tafeln . . . . .	60
§ 15. Die Tafeln für vier Variable mit dem Schnittsystem zweiten Grades . . . . .	62
A. Das Schnittsystem besteht aus zwei parallelen Geraden . .	63
B. Das Schnittsystem besteht aus zwei sich schneidenden Ge- raden . . . . .	71
§ 16. Duale Nomogramme, Kurvenscharen . . . . .	73
§ 17. Metrische Nomogramme . . . . .	78

## § 1. Allgemeine Bemerkungen.

Die von d'Ocagne in seinem „Traité de Nomographie“ (1899) veröffentlichten Methoden haben eine große Verbreitung erlangt, nachdem es sich gezeigt hatte, welche große praktische Anwendung sie finden können. Heutzutage werden die nomographischen Tafeln, welche komplizierte Rechnungen in hohem Grade vereinfachen, nicht nur von Physikern in den Laboratorien und Ingenieuren in den Büros angewendet — die Leichtigkeit ihres Gebrauches hat zur Folge, daß manche Unternehmungen sie sogar den Monteuren und Meistern in die Hände geben, zwecks Anwendung bei der Montage und in der Werkstatt. Die Nomographie ist, ähnlich wie der Rechenschieber, ein weiterer Schritt zur Befreiung des Arbeitenden von rein mechanischen Rechenoperationen. Ihre große Bedeutung liegt darin, daß sie zwei Zeitmomente einander nähert: das Moment der Aufstellung einer Formel und das Moment ihrer Berechnung. Mit einem Worte, sie verkürzt den Weg zwischen Vorsatz und Ausführung. In dieser Eigenschaft bildet sie ein Werkzeug der Gedankenökonomie, die dem Geiste erlaubt, sich auf das zu konzentrieren, was seine vorwiegende Aufgabe bildet — auf die schöpferische Arbeit anstatt auf die mechanische.

Das Mittel, mit dem bei der Berechnung von funktionellen Zusammenhängen dieses Ziel erreicht wird, ist die Durchführung von gewissen einfachen Manipulationen auf geometrisch-graphischen Figuren, welche nomographische Tafeln oder Nomogramme genannt werden. Eine nomographische Tafel besteht aus einer bestimmten Anzahl von Geraden oder Kurven, auf welchen auf Grund bestimmter Regeln und Zusammenhänge Teilpunkte aufgetragen und Zahlen eingeschrieben sind, die Argumente bedeuten, welchen diese Punkte entsprechen. Solche Linien werden Skalen genannt. Indem wir die Skalen einer nomographischen Tafel mit einer Geraden oder mit einem System von Geraden, das dann Schnittsystem heißt, schneiden, können wir an den Schnittpunkten die Zahlen ablesen, die gewissen funktionellen Zusammenhängen entsprechen.

Der Anwendungsbereich der nomographischen Tafeln ist sehr groß; mit ihrer Hilfe lassen sich Funktionen von 2, 3, 4 und, durch Zusammensetzen mehrerer Tafeln, auch mehreren Variablen berechnen; unter anderem kann man nomographisch auch algebraische Gleichungen lösen. Die Zeit, die zum Ablesen dieser funktionellen Zusammenhänge nötig ist, ist gering im Vergleich mit der Zeit, die die Durchführung derselben Rechnung auf dem gewöhnlichen Wege erfordert — und darin besteht eben die Ökonomie, die die nomographischen Tafeln einführen.

Eine große Reihe von Tafeln für Berechnungen, die oft in der Technik vorkommen, wie z. B. Berechnung des Spannungsabfalles in elektrischen Leitungen, des elektrischen Widerstandes, der Riemen- und Zahntriebe und viele andere, sind durch die Gesellschaft „Stugra“ (Zentralstelle für graphische Berechnungstafeln, Berlin-Waidmannslust) zusammengestellt und herausgegeben. Die mehr ins Spezielle gehenden und seltener vorkommenden Berechnungen erfordern eine Konstruktion ad hoc, die den speziellen Bedingungen (z. B. Bereich, Genauigkeit usw.) angepaßt ist. Eine solche Konstruktion verlangt Kenntnis der Theorie der nomographischen Tafeln; außerdem liegt eine Schwierigkeit darin, daß man jede Funktion meistens in mehrfacher Weise nomographisch darstellen kann, und es handelt sich darum, aus allen möglichen Fällen die einfachste Darstellung zu wählen.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, die Theorie und die Konstruktionsgrundlagen der nomographischen Tafeln zu entwickeln.

## § 2. Die Darstellung einer Funktion einer Variablen mittels Kurve und mittels Skala.

Ein sehr verbreitetes Hilfsmittel bei Rechnungen mit der Funktion  $y = f(x)$  ist die Darstellung dieser Funktion in Form einer Tafel mit zwei Kolonnen, wobei in der einen sich die Werte der Variablen  $x$ , in der anderen die entsprechenden Werte der Variablen  $y$  befinden. Von dieser Art sind z. B. die Quadrat- und Kubiktafeln der natürlichen Zahlen, die Logarithmentafeln und viele andere. Ebenso oft, und zwar am meisten, wenn der funktionelle Zusammenhang zwischen den Variablen unbekannt und z. B. auf experimentellem Wege entstanden ist, gebraucht man die graphische Darstellung der Funktion mittels der kartesischen Koordinaten in Form einer Kurve. Zu dieser Kategorie gehören z. B. die in der Elektrotechnik gebrauchten Magnetisierungskurven, die  $J$ — $S$ -Kurven in der Wasserdampftechnik u. a.

In den nomographischen Tafeln wird eine andere Art von Funktionsdarstellung gebraucht. Dies ist die sog. Doppelskala und die Funktionsskala. Legen wir in der graphischen Darstellung  $y = f(x)$  (Abb. 1) auf der Abszissenachse  $OX$  Teilpunkte der Variablen  $x$ , die den Werten 1, 2, 3, 4 usw. dieser Variablen (sog. natürliche Reihe) entsprechen. Zu jedem Punkte schreiben wir die Zahl, die den entsprechenden Wert der Variablen  $x$  ausdrückt. Es wird dann Strecke  $01 =$  Strecke  $12 =$  Strecke  $23$  usw., und die Längen dieser Strecken sind von dem von uns beliebig angenommenen Maßstabe abhängig. In dieser Weise bekommen wir auf der Achse  $OX$  eine Skala, die wir natürliche Skala nennen.

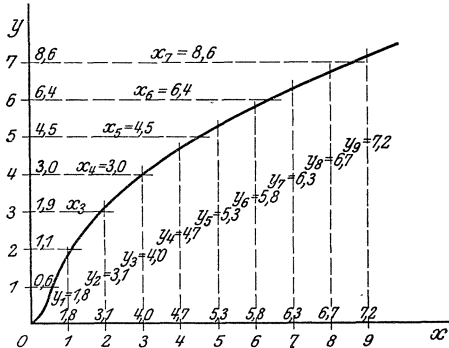


Abb. 1.

Wenn wir nun, graphisch mit Hilfe der Kurve oder analytisch, die Werte  $y_1, y_2, y_3$  der Variablen  $y$ , die den Werten der Teilpunkte der Variablen  $x$  entsprechen, bestimmen und sie

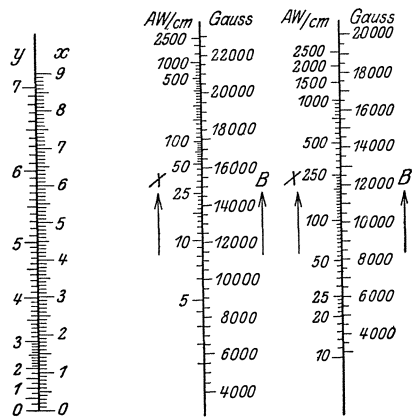


Abb. 2.

Eisenblech. Gußeisen.  
Abb. 3.

und umgekehrt, finden (Abb. 2). Die graphische Darstellung besitzt eine größere Anschaulichkeit und Verständlichkeit als die

Skalendarstellung einer Funktion, jedoch auch diese letztere hat viele Vorteile. So z. B. wird der Gebrauch der Magnetisierungskurve für große magnetische Sättigungen unbequem. In der Doppelskala (Abb. 3) verschwindet diese Unannehmlichkeit. In der Doppelskala benutzen wir nur eine Raumdimension (Länge), wogegen die graphische Darstellung nach Abb. 1 zwei Raumdimensionen ausnutzt und viel mehr Platz erfordert. Außerdem ist das Ablesen von der Doppelskala viel bequemer als von der graphischen Darstellung.

Von großem praktischen Wert ist auch die Eigenschaft der nomographischen Darstellung einer Funktion mit mehreren Variablen, daß man während der Rechnung bald eine, bald eine andere Variable beliebig als Funktion der anderen bestimmen kann.



In ähnlicher Weise, wie wir es mit der Variablen  $y$  machten, indem wir ihre Werte auf der Abszissenachse einschrieben, können wir mit der Variablen  $x$  vorgehen und ihre Werte auf der Ordinatenachse auftragen. Wir bekommen dann eine Doppelskala (Abb. 4), welche die zur Funktion  $y = f(x)$  inverse Funktion  $x = F(y)$  darstellt.

Falls wir zwei Funktionen einer unabhängigen Variablen

$$y = f_1(x); \quad z = f_2(x) \quad (1)$$

haben, so können wir sie mittels einer dreifachen Skala darstellen, aus der wir ebenfalls die durch die Gleichungen (1) entstandene Abhängigkeit zwischen  $y$  und  $z$  ablesen können. Abb. 5 stellt in einer dreifachen Skala den Zusammenhang zwischen dem Druck von gesättigtem Wasserdampf (in

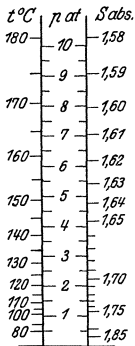


Abb. 5.

Atmosphären), seiner Temperatur (in Graden C) und seiner Entropie (in absoluten Einheiten) dar.

Kommen wir jetzt zur graphischen Funktionsdarstellung zurück und übertragen wir, wie dies auf Abb. 6 gezeigt ist, die Werte der Variablen  $y$  auf die Ordinatenachse. Nach Einschreiben an den erhaltenen Teilpunkten der entsprechenden Werte von  $x$  und  $y$  würden wir auf der Ordinatenachse wieder eine Doppelskala der Funktion  $y = f(x)$  bekommen. Wenn wir jedoch an den Teilpunkten nur die Werte der unabhängigen Variablen  $x$  auftragen, ohne die Werte der abhängigen Variablen  $y$  anzugeben, so erhalten wir eine Skala mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 usw., wobei jedoch die

Strecken 0 1, 0 2, 0 3 usw. gleich den in einem beliebigen (konstanten) Maßstabe dargestellten Größen  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$  usw. sind, die wir erhalten, wenn wir die entsprechende Teilzahl von  $x$  in die Funktion  $y = f(x)$  einsetzen. Eine solche Skala nennen wir die Funktionsskala der Funktion  $y = f(x)$  (Abb. 7). In ganz ähnlicher Weise können wir die Funktionsskala der inversen Funktion  $x = F(y)$  erhalten.

Aus jeder Funktionsskala kann man eine Doppelskala erhalten durch Hinzuschreiben der Werte der unabhängigen Variablen.

Die am häufigsten gebrauchten Funktionsskalen sind die Potenzskalen, die logarithmischen und die projektiven Skalen.

Ein sehr wichtiger Begriff beim Aufstellen von Funktionsskalen ist der Begriff des Maßstabes (Moduls). Maßstab einer Funktionsskala  $y = f(x)$  nennen wir die in Maßeinheiten (mm, cm usw.) ausgedrückte

Länge einer der numerischen Einheit der Variablen  $y$  entsprechenden Strecke. Den Maßstab einer solchen Skala

bezeichnen wir mit  $\mu_y$  oder  $\mu(f)$ . Dementsprechend bezeichnen wir als Maßstab (Modul) der natürlichen Skala  $x$  die in Maßeinheiten ausgedrückte Streckenlänge, welche in dieser Skala die numerische Einheit der Variablen  $x$  einnimmt. Diesen Maßstab bezeichnen wir mit  $\mu_x$ .

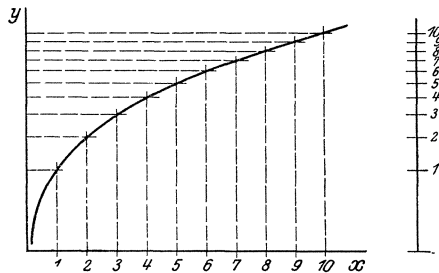


Abb. 6.

Abb. 7.

### § 3. Die Potenz- und die logarithmische Skala.

Die Potenzskala entspricht der Gleichung  $y = x^n$ , wo  $n$  eine ganze Zahl oder ein Bruch sein kann. Diese Skala konstruieren wir mittels Tafel, direkter Berechnung oder graphischer Darstellung. So z. B. können wir zur Konstruktion der Skala  $x = y^{2/3}$  oder der Skala  $y = x^{3/2}$  die graphischen Darstellungen der Kurven  $z = y^3$  und  $z = x^2$  benutzen (Abb. 8), wobei jedoch darauf zu achten ist, daß der Maßstab für die Variable  $z$  in beiden Kurven derselbe sein muß und daß auch die Maßstäbe für die (unabhängigen) Variablen  $x$  und  $y$  auf der Abszissenachse gleich sein



müssen. Die Konstruktion der beiden Skalen zeigt die Abbildung. Die Punkte 3,0 und 3,5 gehören der Skala  $x = y^{3/2}$ , der Punkt 8,0 der Skala  $y = x^{2/3}$  an. Dieselbe Methode können wir allgemein auf die Funktion  $f(x, y) = 0$  anwenden, falls wir sie in der Form  $\varphi(y) = \psi(x)$  darstellen können.

In der Potenzskala ist die relative Ablesungsgenauigkeit verschieden an verschiedenen Stellen der Skala. Wenn in einer Potenzskala  $y = x^n$ , die mit Maßstab  $\mu_y$  entworfen ist, der absolute Fehler, der bei der Ablesung begangen werden kann, maximal  $\pm \delta$  mm beträgt (d. h. bei der Ablesung des Argumentes  $x$  des Punktes  $A$  der Skala die Fehlablesung des Argumentes  $x'$  des Punktes  $A'$  möglich ist, wobei  $AA' \leq \delta$  ist), so ist

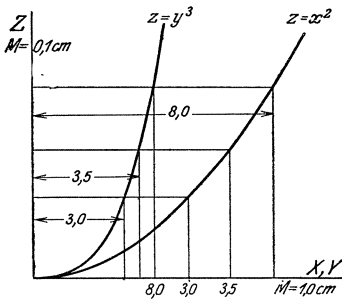


Abb. 8.

$$OA = \mu_y x^n; \quad OA' = \mu_y x'^n$$

und

$$OA' - OA = \delta = \mu_y x'^n - \mu_y x^n,$$

$$\text{oder} \quad x' = \sqrt[n]{\frac{\delta}{\mu_y} + x^n}.$$

Da  $\delta$  eine sehr kleine Größe ist, so können wir in der ersten Annäherung schreiben

$$x' = x \left( 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{\delta}{\mu_y x^n} \right).$$

Der relative Fehler im Punkt  $x$  ist dann

$$D = \frac{x' - x}{x} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\delta}{\mu_y x^n},$$

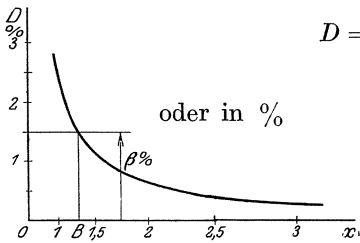


Abb. 9.

$$\text{oder in } \% \quad D \% = \frac{100 \delta}{n \mu_y x^n}. \quad (2)$$

Wir sehen also, daß der Fehler um so größer ist, je näher dem Anfange wir uns befinden. Abb. 9 versinnbildlicht uns die Beziehung (2) für  $\mu_y = 10$  mm,  $\delta = 0,5$  mm und  $n = 2$ .

Auf der Abszissenachse ist die Funktionsskala  $y = x^2$  aufgetragen, so daß wir aus der Zeichnung direkt ablesen können, wie groß der maximale Fehler sein kann, der in jedem Punkte der Skala gemacht werden kann. Falls wir annehmen, daß der maximale Relativfehler kleiner als  $\beta\%$  sein soll, kann der Teil der Skala von Punkt  $O$  bis Punkt  $B$  nicht benutzt werden.

Abb. 10 stellt eine in den nomographischen Tafeln ganz besonders oft verwendete logarithmische Skala  $y = \log_{10} x$  dar mit Maßstab  $\mu_y = 100$  mm. Die logarithmische Skala besitzt die außerordentlich wichtige Eigenschaft, die sie von allen anderen Funktionsskalen unterscheidet: der relative Ablesungsfehler ist in allen Punkten der Skala gleich. Wenn dem Punkte  $A$  der logarithmischen Skala das Argument  $x$  und dem um  $\delta$  mm entfernten Punkte  $A'$  das Argument  $x' = \gamma x$  entspricht, so ist

$$\mu_y \lg \gamma = \delta. \tag{3 a}$$

Dann ist der relative Fehler

$$D = \frac{\gamma x - x}{x} = \gamma - 1. \tag{3 b}$$

Er ist also konstant und hängt nur vom absoluten Fehler und vom Maßstabe der Skala ab. Eine Folge dieser Eigenschaft ist z. B., daß wir mit dem logarithmischen Rechenschieber am Ende der Skala weniger Dezimalzeichen als an ihrem Anfange ablesen können.

Da alle Berechnungen, die mit nomographischen Tafeln ausgeführt werden, Näherungsberechnungen sind, so ist es sehr wichtig, den Grad der Näherung zu kennen, damit der relative Fehler nicht die ihm zugewiesenen Grenzen überschreite. In den logarithmischen Skalen ist dieser Fehler eine sehr leicht zu berechnende konstante Größe; durch Wählen eines entsprechenden Maßstabes kann man ihn leicht beliebig verkleinern, und deshalb ist eben die Anwendung der logarithmischen Skalen so bequem. In anderen Skalen verlangt die Bestimmung des relativen Fehlers eine besondere Rechnung.

Bei der Konstruktion der Tafeln ist oft nötig, die logarithmischen Skalen in verschiedenen Maßstäben aufzutragen. Die Rechnungen, die man zu diesem Zwecke durchführen muß, sind langwierig. Um uns diese Konstruktion zu erleichtern, zeichnen wir am besten auf Millimeterpapier eine Hilfskonstruktion, wie in Abb. 11. Auf der Geraden  $OM$  ist eine logarithmische Skala

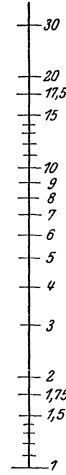


Abb. 10.  
0,4 natürl.  
Größe.

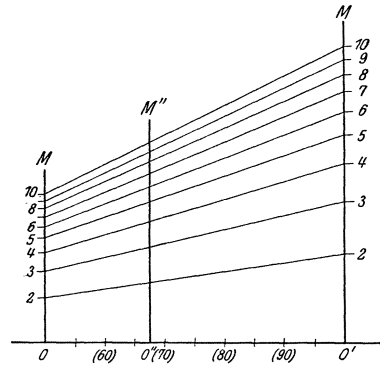


Abb. 11. 0,4 natürl. Größe.

in Abb. 11. Auf der Geraden  $OM$  ist eine logarithmische Skala

mit Maßstab von z. B. 50 mm, auf der von ihr um 100 mm entfernten parallelen Geraden  $O'M'$  eine logarithmische Skala mit Maßstab 100 mm aufgetragen. Die Teilpunkte der beiden Skalen sind miteinander verbunden. Wenn wir in einer Entfernung von z. B. 35 mm von der Geraden  $OM$  die parallele Gerade  $O''M''$  führen, so erhalten wir auf ihr die Teilpunkte einer logarithmischen Skala mit Maßstab  $50 + \frac{35}{2} = 67,5$  mm.

#### § 4. Die projektive Skala.

Wenn wir auf der Ebene zwei Punktreihen auf zwei Geraden  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  haben und zwischen den Punkten einer Punktreihe und denen der anderen eine solche Abhängigkeit bestimmen, daß dem Punkte  $A_1$  der Geraden  $\alpha_1$  der Punkt  $A_2$  der Geraden  $\alpha_2$ ,  
 „ „  $B_1$  „ „ „  $\alpha_1$  „ „ „  $B_2$  „ „ „  $\alpha_2$ ,  
 „ „  $C_1$  „ „ „  $\alpha_1$  „ „ „  $C_2$  „ „ „  $\alpha_2$   
 zugeordnet ist und einer harmonischen Gruppe von vier Punkten einer Punktreihe eine harmonische Gruppe der anderen Punktreihe entspricht, dann entspricht jedem Punkte  $D_1$  der Punktreihe  $\alpha_1$  ein bestimmter Punkt  $D_2$  der Punktreihe  $\alpha_2$  und umgekehrt, wobei das Doppelverhältnis

$(A_1, B_1, C_1, D_1) =$  dem Doppelverhältnis  $(A_2, B_2, C_2, D_2)$  ist

$$\text{oder} \quad \frac{A_1 C_1}{B_1 C_1} : \frac{A_1 D_1}{B_1 D_1} = \frac{A_2 C_2}{B_2 C_2} : \frac{A_2 D_2}{B_2 D_2}.$$

Eine solche Abhängigkeit nennt man, wie bekannt, eine projektive. Bezeichnen wir die Entfernung der Punkte  $A_1, B_1, C_1$  usw. der Punktreihe  $\alpha$  vom festen Punkt  $O_1$  derselben Punktreihe mit  $y_1, y_2, y_3$  usw. und die Entfernung der entsprechenden Punkte der Punktreihe  $\alpha_2$  vom festen Punkt  $O_2$  dieser Punktreihe mit  $x_1, x_2, x_3$  usw. Man kann leicht beweisen, daß, wenn für jedes Paar der zugeordneten Werte  $x$  und  $y$  die Abhängigkeit

$$y = \frac{kx + l}{mx + n} \quad (4)$$

besteht, die Abhängigkeit zwischen den Punktreihen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  eine projektive ist. In der Tat, wenn wir den Ausdruck für das Doppelverhältnis der Punkte  $y_1, y_2, y_3$  und  $y_4$  bilden:

$$d = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} : \frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4}$$

und in denselben die Werte der entsprechenden  $y$  aus der Gleichung (4) einsetzen, so erhalten wir den Ausdruck

$$d = \frac{\frac{kx_1 + l}{mx_1 + n} \cdot \frac{kx_3 + l}{mx_3 + n}}{\frac{kx_2 + l}{mx_2 + n} \cdot \frac{kx_3 + l}{mx_3 + n}} : \frac{\frac{kx_1 + l}{mx_1 + n} \cdot \frac{kx_4 + l}{mx_4 + n}}{\frac{kx_2 + l}{mx_2 + n} \cdot \frac{kx_4 + l}{mx_4 + n}},$$

der sich leicht umformen läßt in

$$\bar{d} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4}.$$

Umgekehrt, wenn eine projektive Beziehung zwischen zwei Punktreihen durch drei Paare einander zugeordneter Punkte  $A_1$  und  $A_2$ ,  $B_1$  und  $B_2$ ,  $C_1$  und  $C_2$  definiert ist, dann besteht zwischen den Entfernungen  $y$  und  $x$  der einander in dieser Abhängigkeit entsprechenden Punkte  $D_1$  und  $D_2$  von den festen Punkten  $O_1$  bzw.  $O_2$  die Beziehung (4).

Die projektive Abhängigkeit läßt sich graphisch folgendermaßen darstellen: Verschieben wir in der Ebene eine von den beiden gegebenen Punktreihen

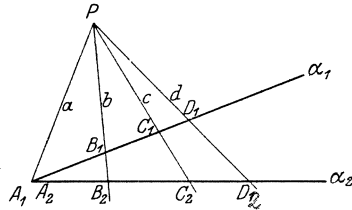


Abb. 12.

so, daß z. B. der Punkt  $A_1$  der ersten Punktreihe mit dem ihm zugeordneten Punkt  $A_2$  der zweiten zusammenfällt (Abb. 12). Ziehen wir die Geraden  $B_1B_2$ , und  $C_1C_2$ , die sich im Punkte  $P$  schneiden (Perspektivitätszentrum); dann bestimmt die Gerade, die vom Punkte  $P$  zu einem beliebigen Punkte  $D_1$  der ersten Punktreihe  $\alpha_1$  gezogen ist, auf der Geraden  $\alpha_2$ , den dem Punkte  $D_1$  in der zweiten Punktreihe entsprechenden Punkt  $D_2$ . Um uns davon zu überzeugen, bezeichnen wir die Gerade  $AP$  mit  $a$ , die Gerade  $B_1B_2$  mit  $b$ , die Gerade  $C_1C_2$  mit  $c$  usw., den Winkel zwischen den Geraden  $ab$  mit  $(ab)$  usw.; dann erhalten wir ohne weiteres:

Doppelverhältnis  $(a, b, c, d) = \text{Doppelverhältnis}(A_1, B_1, C_1, D_1)$   
oder

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1D_1}{B_1D_1}$$

und daraus folgt:

$$(A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_2, B_2, C_2, D_2).$$

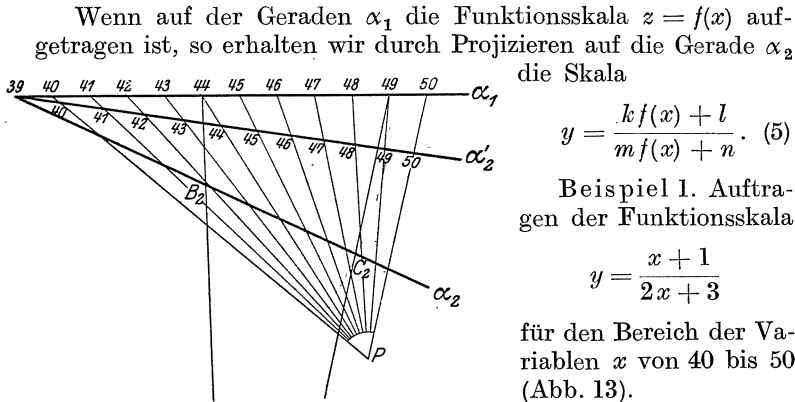


Abb. 13. 0,5 natürl. Größe.

berechnen wir die drei einander entsprechenden Punkte der Skalen  $x$  und  $y$ .

Für	$x = 39$ ( $A_1$ )	ist	$y = 2,0250$ ( $A_2$ ),
	$44$ ( $B_1$ )		$2,0222$ ( $B_2$ ),
	$49$ ( $C_1$ )		$2,0200$ ( $C_2$ ).

Wir tragen die Skala für  $x$  (natürliche Skala) auf der Geraden  $\alpha_1$  auf mit Maßstab  $\mu_x = 10$  mm, die Skala für  $y$  auf der Geraden  $\alpha_2$ . Wir nehmen an  $\mu_y = 20\ 000$ ; dann ist die Länge der Skala  $y$  für den Bereich von 39 bis 49 gleich  $20\ 000 (2,0250 - 2,0200) = 100$  mm; wenn wir auf der Geraden  $\alpha_2$  vom Punkte  $A_2$  100 mm auftragen, so bekommen wir den Punkt  $C_2$ ; in einer Entfernung von  $20\ 000 (2,0250 - 2,0222) = 56$  mm vom Punkte  $A_2$  befindet sich der Punkt  $B_2$ . Der Schnittpunkt der Geraden  $B_1 B_2$  und  $C_1 C_2$  ist das Perspektivitätszentrum. Dieser Punkt ist jedoch sehr weit entfernt. Um eine bequemere Zeichnung zu bekommen, ändern wir die Lage der Skala  $y$  und wählen für die letztere die Gerade  $\alpha'_2$  (s. auch S. 35 ff.). Vom erhaltenen Perspektivitätszentrum  $P$  projizieren wir die Skala  $x$  auf die Gerade  $\alpha'_2$  und erhalten auf derselben die Funktionsskala. Probe: Für  $x = 41$  erhält man aus der Berechnung 2,0238, aus der Zeichnung 2,0238.

Beispiel 2. Zwischen der Dichte  $D$  eines durchsichtigen Mediums und dem Lichtbrechungsindex  $n$  besteht die Beziehung

$$RD = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2},$$

wo  $R$  eine Konstante ist und die spezifische Brechungskonstante bedeutet. Diese Beziehung können wir mittels einer Funktionsskala darstellen (Abb. 14). Auf der Geraden  $\alpha_1$  tragen wir die Skala

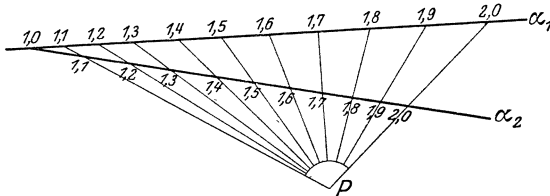


Abb. 14. 0,5 natürl. Größe.

für  $n^2$  auf und bestimmen eine projektive Beziehung mittels dreier Punktpaare

$$n = 1; \quad 1,5; \quad 2$$

$$R D = 0; \quad 0,295; \quad 0,5;$$

durch Projizieren erhalten wir auf der Geraden  $\alpha_2$  die Funktionsskala. Auf der Zeichnung ist angenommen

$$\mu(n^2) = 40 \text{ mm}; \quad \mu(Rd) = 200 \text{ mm}.$$

Bemerkung. Die Skalen und die Tafeln in diesem und in den weiter vorkommenden Beispielen dienen ausschließlich zur Demonstrierung der Methoden und Versinnbildlichung der Konstruktion, nicht aber zum praktischen Gebrauch bei Berechnungen. Bei Konstruktion von Skalen, die zu Berechnungen dienen sollen, muß man denselben selbstverständlich eine viel feinere Unterteilung geben, als es in dieser Arbeit möglich wäre.

Beispiel 3. Die Skala

$$y = \frac{1}{1 + \log x}$$

für den Bereich von  $x = 1$  bis  $x = 20$

tragen wir auf mittels folgender Hilfspunkte für die Bestimmung des Perspektivitätszentrums (Abb. 15):

$$x = 1; \quad 5; \quad 10 \quad (\text{Gerade } \alpha_1),$$

$$y = 1; \quad 0,593; \quad 0,5 \quad ( \quad , \quad \alpha_2).$$

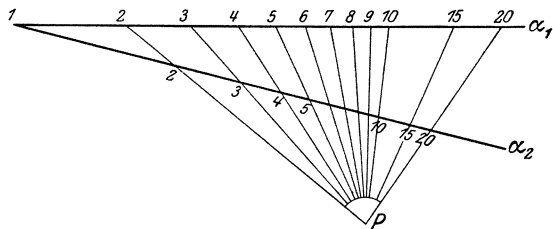


Abb. 15. 0,5 natürl. Größe.

(Die Werte der Variablen  $x$  wachsen in der Richtung von links nach rechts, die Werte der Variablen  $y$  in der umgekehrten Richtung.) Die Maßstäbe sind  $\mu_x = 100$  mm,  $\mu_y = 200$  mm. Es ist also die Entfernung zwischen den Punkten 1 und  $\infty$  der Skala  $\alpha_2$  gleich 200 mm; Punkt  $\infty$  der Skala  $\alpha_2$  ergibt sich als Schnittpunkt mit Parallelen vom  $P$  zur Geraden  $\alpha_1$  (auf der Abbildung nicht eingezeichnet).

### § 5. Die nomographischen Tafeln mit drei parallelen Skalen.

Schneiden wir drei parallele Gerade  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  (Abb. 16) mit der festen Geraden  $ABC$  und zeichnen wir eine beliebige Gerade  $A'C'B'$ . Bezeichnen wir die Entfernung zwischen den Geraden  $\Phi_1$  und  $\Phi_3$  mit  $\alpha$ , die Entfernung zwischen den Geraden  $\Phi_3$  und  $\Phi_2$  mit  $\beta$  und setzen wir

$$AA' = a, \quad BB' = b, \quad CC' = c.$$

Aus  $\triangle A'B'B''$  bekommen wir ( $A'B'' \parallel AB$ ):

$$\frac{B'B'' - C'C''}{C''B''} = \frac{C'C''}{A'C''}$$

oder

$$\frac{b - c}{\beta} = \frac{c - a}{\alpha}$$

oder auch  $(\alpha + \beta)c = \beta a + \alpha b.$  (6)

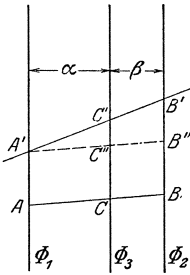


Abb. 16.

Daraus ersehen wir, daß jede Schnittgerade auf den Geraden  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  drei solche Strecken  $a, b$  und  $c$  abschneidet, daß sie der Beziehung (6) genügen. Auf Grund dieser Eigenschaft können wir eine nomographische Tafel zur Auffindung von  $z$  aus der Gleichung

$$z = px + qy \tag{7}$$

konstruieren. Wenn wir  $z = (p + q)z'$  setzen, so bekommen wir die Gleichung

$$\frac{p + q}{\lambda} z' = \frac{p}{\lambda} x + \frac{q}{\lambda} y,$$

die der Gleichung (6) analog ist.  $\lambda$  ist darin eine beliebige Größe. Zur Konstruktion eines Nomogrammes für die Gleichung (7) ziehen wir demzufolge drei Gerade  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , deren Entfernungen  $\frac{p}{\lambda}$  und  $\frac{q}{\lambda}$  mm sind; auf den Geraden  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  wählen wir die Punkte für die Anfänge der Skalen  $x$  und  $y$  (Skalennullpunkte).

Da für  $x = 0$  und  $y = 0$  auch  $z = 0$  ist, so ist der Nullpunkt der Skala  $z$  der Schnittpunkt der Geraden  $\Phi_3$  mit der Geraden, die die Nullpunkte der Skalen  $x$  und  $y$  verbindet. Wenn wir den Teilpunkt „1“ der Skala  $x$  mit dem Teilpunkt „1“ der Skala  $y$  verbinden, so schneidet die erhaltene Gerade die Gerade  $\Phi_3$  im Teilpunkt „1“ für die Skala  $z'$ , oder im Teilpunkt „ $p + q$ “ der Variablen  $z$ . Folglich ist der Maßstab für  $z$   $(p + q)$  mal kleiner als der Maßstab für  $z'$ . Die Gerade, die zwei beliebige Teilpunkte  $x$  und  $y$  verbindet, schneidet auf der erhaltenen Skala  $\Phi_3$  den diesen Werten aus der Gleichung (7) entsprechenden Wert  $z$  ab.

In der Funktion

$$z = px + qy$$

sind die beiden Richtungen, in denen sich auf den Skalen  $x$  und  $y$  diese Variablen vergrößern, gleich, in der Funktion

$$z = px - qy$$

sind diese Richtungen entgegengesetzt.

Beispiel:

$$z = 2x + 3y.$$

Wir setzen  $z = 5z'$  und  $\lambda = 0,1$  und erhalten

$$50z' = 20x + 30y.$$

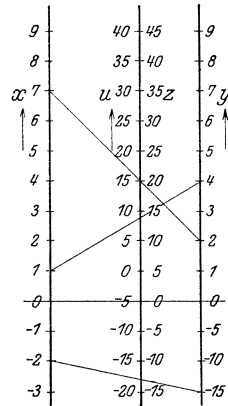


Abb. 17.  
0,4 natürl. Größe.

Dementsprechend machen wir den Abstand zwischen den Skalen  $\Phi_1$  und  $\Phi_3 = 30$  mm, den Abstand zwischen den Skalen  $\Phi_3$  und  $\Phi_2 = 20$  mm. Nachdem die Nullpunkte gewählt sind (Abb. 17), tragen wir die Skalen  $x$  und  $y$  auf, wobei wir setzen

$$\mu_x = \mu_y = 10 \text{ mm.}$$

Für  $z$  nehmen wir den Maßstab fünfmal kleiner:  $\mu_z = 2$ , und tragen die Skala für  $z$  vom Nullpunkt, der sich im Schnittpunkt der Geraden  $OO$  und der Skala  $z$  befindet, auf.

Proben: Für  $x = 1$  und  $y = 4$  ist  $z = 14$

„  $x = 7$  „  $y = 2$  „  $z = 20$ .

Wenn wir die Skalen nach unten verlängern, so ersehen wir, daß sich die nomographische Tafel auch für negative Werte eignet.

Probe: Für  $x = -2$  und  $y = -3$  ist  $z = -13$ .

Die Pfeile bei den Skalen bedeuten die Richtungen, in denen sich die Variablen vergrößern.



Die Funktion

$$u = px = qy \pm k \tag{8}$$

tragen wir in derselben Weise auf wie die frühere Funktion 7, mit dem Unterschied, daß wir die Skala  $z$  um  $k$  entsprechend nach oben oder unten verlängern.

Beispiel:  $u = 2x + 3y - 5$  (Abb. 17).

Die Anwendung der nomographischen Tafeln für solche einfache Funktionen wie die Funktionen (7) und (8) bietet selbstverständlich keine Vorteile. Praktische Bedeutung erhalten die Tafeln der oben beschriebenen Art erst in Verbindung mit Funktionsskalen. Falls wir in der Gleichung (6) annehmen, daß  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  Funktionsskalen sind, so daß

$$a = \frac{1}{\alpha} f_1(x), \quad b = \frac{1}{\beta} f_2(y), \quad c = \frac{1}{\alpha + \beta} f_3(z),$$

so zeigt sich, daß mittels dieser Tafeln wir die Funktionen vom Typus

$$f_3(z) = f_1(x) + f_2(y) \tag{9}$$

berechnen können.

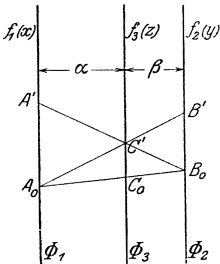


Abb. 18.

Bevor wir zur Konstruktion dieser Tafeln schreiten, wollen wir die Beziehung zwischen den Maßstäben ableiten, was uns die Aufgabe erleichtern wird. Schreiben wir die Funktion  $f(z)$  in der Form

$$f(z) = \zeta(x, y)$$

und nehmen wir an, daß wir Werte  $x_0, y_0, x', y'$  gefunden haben, für welche

$$f_1(x_0) = f_2(y_0) = 0; \quad f_1(x') = f_2(y') = 1.$$

Bezeichnen wir den Maßstab der Skala  $f_1(x)$  mit  $\mu(f_1)$ ,

„ „ „ „  $f_2(y)$  „  $\mu(f_2)$ ,

„ „ „ „  $f_3(z)$  „  $\mu(f_3)$ .

Dann ist

$$\left. \begin{aligned} \zeta(x', y_0) = f_1(x') = 1 \\ \zeta(x_0, y') = f_2(y') = 1 \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

Bei Darstellung der Funktion  $\zeta$  mittels dreier paralleler Skalen  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  (Abb. 18) erhalten wir folgende geometrische Interpretation der Gleichungen (10):

Wenn Punkt  $A_0$  auf der Skala  $\Phi_1$  dem Argumente  $x_0$ ,  
 „  $A'$  „ „ „ „  $\Phi_1$  „ „ „  $x'$ ,  
 „  $B_0$  „ „ „ „  $\Phi_2$  „ „ „  $y_0$ ,  
 „  $B'$  „ „ „ „  $\Phi_2$  „ „ „  $y'$

entspricht, so ist

$$\zeta(x', y_0) = \zeta(x_0, y') = C_0 C' = \mu(f_3),$$

$$A_0 A' = \mu(f_1); \quad B_0 B' = \mu(f_2).$$

Da

$$\frac{C_0 C'}{B_0 B'} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}; \quad \frac{C_0 C'}{A_0 A'} = \frac{\beta}{\alpha + \beta},$$

ist, so ist

$$\frac{\mu(f_3)}{\mu(f_2)} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}; \quad \frac{\mu(f_3)}{\mu(f_1)} = \frac{\beta}{\alpha + \beta},$$

$$\frac{\alpha}{\mu(f_3)} = \frac{\alpha + \beta}{\mu(f_2)}; \quad \frac{\beta}{\mu(f_3)} = \frac{\alpha + \beta}{\mu(f_1)}$$

und

$$\frac{1}{\mu(f_3)} = \frac{1}{\mu(f_1)} + \frac{1}{\mu(f_2)}; \quad \frac{\mu(f_1)}{\mu(f_2)} = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (10)$$

Diese Bezeichnungen lassen uns  $\mu(f_3)$  und  $\beta$  berechnen, wenn  $\mu(f_1)$ ,  $\mu(f_2)$  und  $\alpha$  angenommen sind. Wenn die Tafeln für den Bereich der Variablen  $x$  von  $x = x_1$  bis  $x = x_2$  und für den Bereich der Variablen  $y$  von  $y = y_1$  bis  $y = y_2$  dienen sollen und wenn die Länge der Skala  $f_1 - M_1$ , die Länge der Skala  $f_2 - M_2$  betragen soll, so kann man annehmen

$$\mu(f_1) \cong \frac{M_1}{f_1(x_2) - f_1(x_1)}; \quad \mu(f_2) \cong \frac{M_2}{f_2(y_2) - f_2(y_1)}, \quad (11)$$

wonach man auf Grund der Gleichungen (10)  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\mu(f_3)$  berechnen kann.

Beispiel 1. In der Tafel für Funktion

$$z = 2x^2 + \frac{1}{1 + \lg y} \quad (\text{Abb. 19})$$

ist die Skala für  $z$  eine natürliche Skala, die Skala für  $x$  eine Potenzskala, die Skala für  $y$  die in der Abb. 15 dargestellte projektive Skala. Wir wählen

$$\mu(f_1) = 200 \text{ mm}, \quad \mu(f_2) = 200 \text{ mm}$$

(wie auf der Abb. 15). Dann ist

$$\frac{1}{\mu(f_3)} = \frac{1}{200} + \frac{1}{200} = \frac{1}{100}; \quad \mu(f_3) = 100 \text{ mm}$$

und

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1.$$

Auf Grund dessen können wir die nomographische Tafel konstruieren. Da  $f_1 = 2x^2$  ist, so befindet sich der Teilpunkt „1“ der Skala  $f_1$  in der Entfernung  $2 \cdot 200 = 400 \text{ mm}$  vom Nullpunkt.

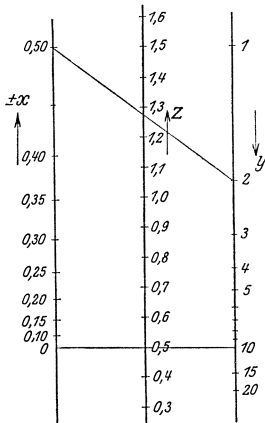


Abb. 19. 0,4 natürl. Größe.

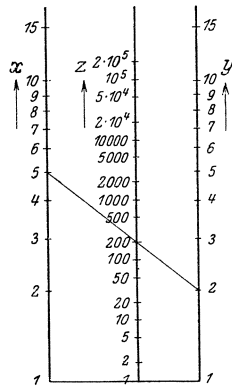


Abb. 20. 0,4 natürl. Größe.

Dabei muß man bedenken, daß die Richtung des Wachsens der Variablen  $x$  (auf der Abbildung mit Pfeil bezeichnet) der Richtung des Wachsens von  $y$  entgegengesetzt ist. Auf dem Schnittpunkt der Geraden  $\Phi_3$  mit der Geraden, die die Punkte  $x = 0$  und  $y = 10$  verbindet, erhalten wir  $z = 0,5$  und von diesem Punkte tragen wir die Skala  $f_3$  mit Hilfe des berechneten Maßstabes auf. Probe: Für  $x = 0,5$  und  $y = 2$  ist  $z = 1,267$  aus der Berechnung,  $z = 1,265$  aus der Zeichnung.

Die Tafel in Abb. 19 ist gezeichnet für den Bereich der Variablen  $\pm x$  von  $x_1 = 0$  bis  $x_2 = 0,5$  und für einen Bereich der Variablen  $y$  von  $y_1 = 1$  bis  $y_2 = 20$ . Für andere Bereiche muß man entsprechend die Skala  $\Phi_1$  längs derselben Geraden verschieben.

Beispiel 2. Die Funktion

$$z = x^m y^n$$

können wir zur Form der Gleichung (9) mittels Logarithmierens zurückführen, wodurch wir erhalten:

$$\lg z = m \lg x + n \lg y.$$

Abb. 20 stellt eine Tafel dar für die Funktion

$$z = x^2 y^3$$

oder

$$\lg z = 2 \lg x + 3 \lg y.$$

In diesem Falle ist also

$$f_1 = 2 \lg x; \quad f_2 = 3 \lg y; \quad f_3 = \lg z.$$

Wir nehmen an

$$\mu(f_1) = 50 \text{ mm}; \quad \mu(f_2) = 33\frac{1}{3} \text{ mm};$$

dann ist

$$\mu(f_3) = \frac{\mu(f_1) \mu(f_2)}{\mu(f_1) + \mu(f_2)} = 20 \text{ mm}$$

und

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2}.$$

Daraus folgt:

Teilpunkt „10“ der Skala  $x$  befindet sich im Abstand von  $50 \cdot 2 = 100$  mm,

Teilpunkt „10“ der Skala  $y$  befindet sich im Abstand von  $33\frac{1}{3} \cdot 3 = 100$  mm,

Teilpunkt „10“ der Skala  $z$  befindet sich im Abstand von 20 mm

vom Nullpunkt der betreffenden Skala.

Probe:  $x = 5, \quad y = 2, \quad z = 200.$

Die Tafel ist nur für positive Werte von  $x$  und  $y$  konstruiert.

## § 6. Die nomographischen Tafeln mit zwei Parallelen und einer sie schneidenden Geraden.

Schneiden wir das System von drei Geraden  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  (Abb. 21) mit der beliebigen festen Geraden  $A'B'C'$ . Bezeichnen wir:

$$AA' = a; \quad CC' = c; \quad AC = g; \quad AB' = p.$$

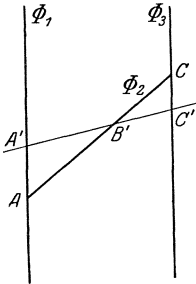
Wir erhalten dann aus Ähnlichkeit der  $\triangle AB'A'$  und  $\triangle CB'C'$ :

$$\frac{g-p}{c} = \frac{p}{a}$$

oder

$$p = \frac{ag}{a + c}. \tag{12}$$

Nehmen wir an, daß die Skala  $\Phi_2$  keine natürliche, sondern eine projektive Skala einer anderen Skala  $b$  wäre, die der Gleichung



$$p = \frac{g}{b + 1}$$

entspricht. Aus den beiden letzten Gleichungen finden wir

$$\frac{ag}{a + c} = \frac{g}{b + 1}$$

oder

$$c = ab.$$

Wenn wir annehmen, daß  $a$ ,  $b$  und  $c$  Funktionskalen sind, die den Gleichungen

$$c = f_3(z); \quad a = f_1(x); \quad b = f_2(y)$$

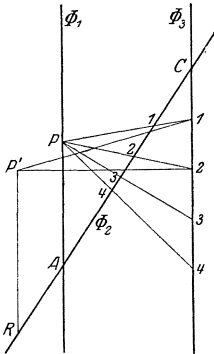
Abb. 21.

entsprechen, so erhalten wir die Gleichung

$$f_3(z) = f_1(x) \cdot f_2(y), \tag{13}$$

die sich mittels der besprochenen nomographischen Tafel darstellen läßt.

Um auf der Geraden  $\Phi_2$  die Skala für  $p$  zu finden, wobei



$$p = \frac{g}{f_2(y) + 1}, \tag{14}$$

tragen wir auf der Geraden  $\Phi_3$  vom Punkte  $C$  nach unten die Skala  $f_2(y)$  auf (s. Abb. 22, in welcher  $f_2(y)$  als natürliche Skala angenommen ist). Nehmen wir vorläufig an, daß Punkt  $P'$  das Perspektivitätszentrum ist. Dann entspricht auf der Skala  $\Phi_2$  Punkt  $C$  dem Werte  $p = g$ , Punkt  $R$  dem Werte  $p = 0$ . (Die Gerade  $P'R$  ist parallel zu  $\Phi_1$ .) Daraus folgt, daß  $CR$  gleich  $g$ , daß also  $AR = 0$  sein muß; das Perspektivitätszentrum muß also auf der Skala  $\Phi_1$  liegen. Nehmen wir als Perspektivitätszentrum den Punkt  $P$  an. Wenn wir

Abb. 22.

$PA$  mit  $h$  bezeichnen, so erhalten wir

$$\frac{p}{h} = \frac{g - p}{f_2(y)}$$



= 100 mm] aufgetragen und in beliebiger Entfernung die Gerade  $\Phi_3$  parallel zu  $\Phi_1$ , wie auch die schräg verlaufende Skala  $\Phi_2$  gezogen ist, konstruieren wir auf  $\Phi_2$  die Skala für  $p$ . Zu diesem Zwecke tragen wir auf der Geraden  $\Phi_3$  vom Punkte  $C$  die natürliche Skala für  $y$  auf, wobei wir  $\mu(f_2) = 40$  mm machen. (Die Zahlen dieser Skala sind in Klammern genommen.) Das Perspektivitätszentrum  $P$  nehmen wir auf der Geraden  $\Phi_1$  in 20 mm Entfernung vom Punkte  $A$ . [ $h\mu(h) = 20$  mm.] Durch Projizieren der natürlichen Skala  $y$  auf die Gerade  $\Phi_2$  bekommen wir auf der letzteren die Skala für  $p$ . Das Projizieren der Punkte, die dem Nullpunkt  $C$  der natürlichen Skala ( $y$ ) näher sind, vom Zentrum  $P_1$  würde uns einen ungünstigen (flachen) Schnitt liefern. Aus Gleichung (15) ersehen wir, daß  $\mu(f_1)$  und  $\mu(f_3)$  unverändert bleiben, falls wir gleichzeitig um ebensovielfach  $\mu(f_2)$  und  $h\mu(h)$  ändern. Mit  $h_2 = 2h$  (Punkt  $P_2$ ),  $h_3 = 4h$  (Punkt  $P_3$ ),  $h_4 = 5h$  (Punkt  $P_4$ ) und entsprechend  $\mu''(f_2) = 2\mu(f_2)$ ;  $\mu'''(f_2) = 4\mu(f_2)$ ;  $\mu''''(f_2) = 5\mu(f_2)$  bestimmen wir, ohne die Skalen  $\Phi_1$  und  $\Phi_3$  zu ändern, weitere Punkte der Skala  $\Phi_2$ , wobei wir den ungünstigen Schnitt vermeiden.

Skala  $\Phi_3$  tragen wir auf mit Hilfe des Maßstabes

$$\mu(f_3) = \frac{100 \cdot 40}{20} = 200 \text{ mm.}$$

Wenn wir jetzt eine beliebige Gerade ziehen, die die Skalen  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  in den Punkten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  schneidet, so wird immer die Gleichung

$$z = x^y$$

erfüllt. Es versteht sich von selbst, daß in einer Tafel, die zur Berechnung dient, man sämtliche Hilfslinien [z. B. die Projektionslinien von den Punkten  $P_1$  bis  $P_4$  und die Skala ( $y$ )] weglassen muß.

## § 7. Tafeln mit drei einander schneidenden Geraden.

### A. Die Geraden schneiden sich in einem Punkte.

Wenn wir drei Gerade  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ , die durch einen Punkt  $O$  hindurchgehen, mit einer beliebigen Geraden schneiden, die auf ihnen die Strecken  $a$ ,  $b$  und  $c$  abschneidet, so ist, falls wir die Winkel wie auf Abb. 24 bezeichnen,

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin \vartheta}{\sin(\vartheta + \alpha)}; \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin \vartheta}{\sin(\vartheta + \gamma)}.$$

Tabelle II.

Lfd. Nr.	Schema der Tafel	Nr. des Tafel-typus	Koordinaten-system		Gleichungen der Skalen										Spezial-fälle	Normalform der Funktion $T(x, y, z, w) = 0$	Typische Form der Funktion $T(x, y, z, w) = 0$	Bezeichnung der Typengleichung	Gleichungen für Maßstäbe $\mu$ Bemerkung	
			O, E	O, H	$\phi_1$	$\eta$	$\xi$	$\phi_2$	$\eta$	$\xi$	$\phi_3$	$\eta$	$\xi$	$\phi_4$						$\eta$
1		3			$\phi_1$	$\eta$	$\xi$	$\phi_2$	$\eta$	$\xi$	$\phi_3$	$\eta$	$\xi$	$\phi_4$	$\eta$	$\xi$	16	17	18	
1		I	$\perp \phi_1$	$\phi_1$	0	$f_1(x)$	$k_2$	$f_2(y)$	$k_3$	$f_3(z)$	$k_4$	$f_4(w)$	$k_4$	$f_4(w)$	$k_4$	$f_4(w)$	$k_4$	A	$\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(k_4 - k_2) = \mu(f_4)\mu(k_2)$
2		"	"	"	"	"	"	"	0	"	"	"	"	"	"	"	"	A	"	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(k_2) = \mu(f_4)\mu(k_3)$
3		"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	A	"	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(k_3) = \mu(f_4)\mu(k_2)$
4		II	$\phi_4$	"	"	"	"	"	$k_3$	"	"	$F_4(w)$	0	0	"	"	"	B	$(\Psi_1 + \Psi_2)\Psi_3 + \Psi_4 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
5		"	"	"	"	"	"	"	0	"	"	"	"	"	"	"	"	B	"	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
6		III	$\phi_3$	"	"	"	"	"	$F_3(z)$	0	"	$I_4$	"	"	"	"	"	C	$(\Psi_1 + \Psi_2)(\Psi_3 + \Psi_4) - 1 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
7		"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	$I_4(w)$	"	"	"	"	"	D	$\Psi_1\Psi_2 + \Psi_3\Psi_4 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
8		"	"	"	"	"	"	"	"	"	0	"	"	"	"	"	"	D	"	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
9		"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	D	"	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
10		"	"	"	"	"	"	"	"	"	0	"	"	"	"	"	"	D	"	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
11		IV	"	"	"	"	"	"	"	"	"	$F_4(w)$	$m_4 F_4$	$m_4 F_4$	"	"	"	E	$(\Psi_1 + \Psi_2)(\Psi_3 + \Psi_4) + \Psi_1 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
12		"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	B	"	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
13		"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	F	$(\Psi_1 + \Psi_2)\Psi_3 - \Psi_4 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
14		"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	F	"	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
15		V	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	E	"	Durch Einsetzen von $F_4 = F_1' - \frac{n_4}{m_4}; F_3 = F_1' - \frac{n_4}{m_4}$ erhält man Fall Nr. 11
16		VI	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	G	$(\Psi_1 + \Psi_2)(\Psi_3 + \Psi_4) + \Psi_1\Psi_3 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
17		VII	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	G	"	Durch Einsetzen $F_4 = F_1' - \frac{n_4}{m_4}; F_3 = F_1' - \frac{n_4}{m_4}$ erhält man Fall Nr. 16
18		VIII	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	G	"	Durch Einsetzen $F_4 = F_1' - \frac{n_4}{m_4}; F_3 = F_1' - \frac{n_4}{m_4}$ erhält man Fall Nr. 16
19		IX	$\perp \phi_1$	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	H	$(\Psi_1 + \Psi_2)\Psi_3 + \Psi_4 + \Theta_3 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
20		"	"	"	"	"	"	"	0	"	"	"	"	"	"	"	"	H	"	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
21		X	$\phi_3$	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	J	$(\Psi_1 + \Psi_2)(\Psi_3 + \Psi_4) + \Theta_1 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
22		X	$\phi_3$	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	K	$(\Psi_1 + \Psi_2)\Psi_3 + \Psi_4\Theta_1 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
23		"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	K	"	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
24		XI	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	L	$(\Psi_1 + \Psi_2)(\Psi_3 + \Psi_4) + \Psi_1\Theta_3 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
25		"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	M	$(\Psi_1 + \Psi_2)\Psi_3 + (\Theta_1 + \Theta_2)\Psi_4 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
26		"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	K	"	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
27		XII	$\phi_3$	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	L	"	Durch Einsetzen $f_1 + f_1 + n_2$ erhält man Fall Nr. 24
28		XIII	$\perp \phi_1$	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	N	$(\Psi_1 + \Psi_2)(\Psi_3 + \Psi_4) + \Theta_1 + \Theta_2 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
29		"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	P	$(\Psi_1 + \Psi_2)\Psi_3 + (\Psi_4 + \Theta_3)\Theta_1 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
30		"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	P	"	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
31		XIV	$\phi_3$	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	R	$(\Psi_1 + \Psi_2)(\Psi_3 + \Psi_4) + \Theta_1\Theta_3 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
32		"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	S	$(\Psi_1 + \Psi_2)\Psi_3 + (\Theta_1 + \Theta_2)\Psi_4 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
33		XV	$\perp \phi_1$	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	T	$(\Psi_1 + \Psi_2)(\Psi_3 + \Psi_4) + \Theta_1(\Theta_3 + \Theta_2) = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$
34		XVI	beliebig	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	U	$(\Psi_1 + \Psi_2)(\Psi_3 + \Psi_4) + (\Theta_1 + \Theta_2)(\Theta_3 + \Theta_2) = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2); \mu(f_3) = \mu(f_4); \mu(f_1)\mu(f_4) = \mu(f_3)\mu(k_2)$



Nach Eliminierung von  $\vartheta$  aus diesen Gleichungen erhalten wir

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{b/c - \cos \alpha}{b/a - \cos \gamma},$$

und wenn wir  $\beta = \gamma - \alpha$  setzen:

$$\frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sin \alpha}{a} + \frac{\sin \beta}{b}.$$

Wenn wir auf den Geraden  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  die Funktionsskalen  $f_1, f_2, f_3$  auftragen, so erhält die letztere Gleichung die Form

$$\frac{\sin \gamma}{f_3} = \frac{\sin \alpha}{f_1} + \frac{\sin \beta}{f_2}. \quad (16)$$

Falls die Konstanten  $\sin \gamma, \sin \beta, \sin \alpha$  entbehrlich sind, so kann man sie in die Ausdrücke  $f_3, f_2, f_1$  hineinbeziehen. Man kann auch setzen

$$\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma$$

oder

$$\alpha = \beta = 60, \quad \gamma = 120;$$

in beiden Fällen wird die Gleichung (16) zu

$$\frac{1}{f_3} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_2}. \quad (17)$$

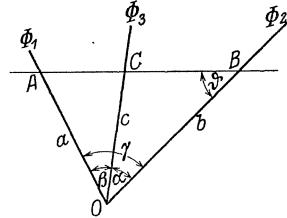


Abb. 24.

Wenn  $\alpha = \beta = 60$  ist, so sind die Schnittpunkte der Geraden  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  mit der Schnittgeraden oft sehr flach, was nicht erwünscht ist. Wir müssen also, falls Koeffizienten gleich  $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$  a priori nicht gegeben sind<sup>1)</sup>, oder, falls sie gegeben, jedoch die von ihnen bestimmten Winkel nicht günstig sind, sie künstlich bilden aus den Ausdrücken  $f_3, f_1, f_2$ . Falls die gegebene Gleichung die Form

$$\frac{C}{f_3(z)} = \frac{A}{f_1(x)} + \frac{B}{f_2(y)}$$

<sup>1)</sup> Die Größen  $\frac{C}{K}, \frac{A}{K}, \frac{B}{K}$  sind dann, und nur dann gleich  $\sin(\alpha + \beta)$ , bzw.  $\sin \alpha$ , bzw.  $\sin \beta$ , wenn:

1.  $C < A + B$ ;

2.  $K = \frac{2ABC}{\sqrt{(A+B+C)(-A+B+C)(A-B+C)(A+B-C)}}$ .

hat, so schreiben wir, nachdem wir  $\alpha$  und  $\beta$  gewählt haben,

$$\frac{\sin \gamma}{F_3(z)} = \frac{\sin \alpha}{F_1(x)} + \frac{\sin \beta}{F_2(y)},$$

wobei

$$F_1(x) = \frac{f_1(x) \sin \alpha}{A}; \quad F_2(y) = \frac{f_2(y) \sin \beta}{B}; \quad F_3(z) = \frac{f_3(z) \sin(\alpha + \beta)}{C}.$$

Um eine Gleichung für  $\mu(f_1)$ ,  $\mu(f_2)$ ,  $\mu(f_3)$  zu erhalten, nehmen wir an, daß für

$$y = y^* \text{ ist } f_2(y^*) = \infty;$$

dann ist

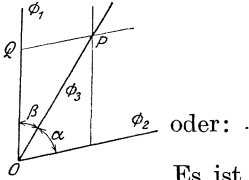
$$\frac{\sin \gamma}{f_3(z)} = \frac{\sin \alpha}{f_1(x)}.$$

Nehmen wir ferner an, daß für

$$x = x' \text{ ist } f_1(x') = 1 \text{ und } z = z^*, \text{ d. h.}$$

$$f_3(z^*) = f_1(x') \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha};$$

andererseits bekommen wir aus Abb. 25 auf Grund der Definition



$$OP = f_3(z^*) \mu(f_3),$$

$$OQ = f_1(x') \mu(f_1),$$

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot \frac{\mu(f_3)}{\mu(f_1)}.$$

Es ist also

$$\mu(f_1) = \mu(f_3).$$

In ähnlicher Weise finden wir:

$$\mu(f_1) = \mu(f_2) = \mu(f_3). \quad (18)$$

Beispiel: Für die Konstruktion der Tafel für die Funktion

$$\frac{3}{z} = \frac{2}{y} + \frac{1}{x}$$

nehmen wir  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$  an (Abb. 26) und formen die obige Gleichung um in

$$\frac{\sin 60}{\frac{z}{2\sqrt{3}}} = \frac{\sin 30}{\frac{y}{4}} + \frac{\sin 30}{\frac{x}{2}};$$

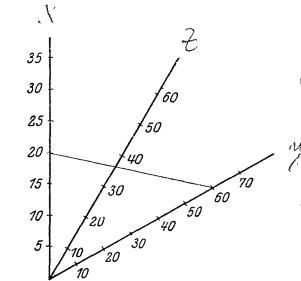


Abb. 26.

$\frac{1}{3}$  natürl. Größe.

dann ist

$$f_1(x) = \frac{x}{2}; \quad f_2(y) = \frac{y}{4}; \quad f_3(z) = \frac{z}{2\sqrt{3}}.$$

Wir wählen

$$\mu(f_1) = \mu(f_2) = \mu(f_3) = 5 \text{ mm};$$

dann ist

$$\mu_x = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ mm},$$

$$\mu_y = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ mm},$$

$$\mu_z = \frac{5}{2\sqrt{3}} = 1,44 \text{ mm}.$$

Probe:

$$\frac{3}{36} = \frac{2}{60} + \frac{1}{20}.$$

### B. Die drei Geraden schneiden sich nicht in einem Punkte.

Wenn wir drei sich nicht in einem Punkte schneidende Gerade  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  mit einer vierten Geraden  $QR$  schneiden (Abb. 27), so können wir folgende Beziehungen ableiten:

Setzen wir auf der Geraden  $AC$  die Richtung von  $C$  nach  $A$ , auf der Geraden  $CB$  die Richtung von  $B$  nach  $C$ , auf der Geraden  $BA$  die Richtung von  $A$  nach  $B$  als die positive Richtung fest und ziehen wir die Gerade  $BS$  parallel zur Geraden  $PQR$ ; dann ist

$$\frac{SA}{PA} = \frac{AB}{AR}; \quad \frac{PA - SA}{PA} = \frac{AR - AB}{AR}$$

oder

$$\frac{BR}{AR} = \frac{PS}{PA}$$

und

$$\frac{BC}{QC} = \frac{CS}{CP}; \quad \frac{BC - QC}{QC} = \frac{CS - CP}{CP}$$

oder auch

$$\frac{QC}{BQ} = \frac{CP}{PS}. \tag{\beta}$$

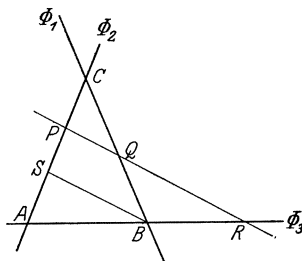


Abb. 27.

Durch Multiplizieren der Gleichungen  $\alpha$  und  $\beta$  bekommen wir

$$\frac{BR}{AR} \cdot \frac{QC}{BQ} = \frac{CP}{PA},$$

oder, wenn wir  $BR$  mit  $RB$  vertauschen,

$$\frac{PA}{CP} \cdot \frac{QC}{BQ} \cdot \frac{RB}{AR} = -1.$$

Durch Einführung der Bezeichnungen

$$\begin{aligned} PA &= \beta; & QC &= \alpha; & RB &= \gamma \\ CA &= b; & BC &= a; & AB &= c \end{aligned}$$

nimmt diese Beziehung die Form

$$\frac{\alpha}{a-\alpha} \cdot \frac{\beta}{b-\beta} \cdot \frac{\gamma}{c-\gamma} = -1 \quad (19)$$

an. Es seien die Variablen  $\alpha, \beta, \gamma$  projektiv abhängig von den Variablen  $x, y, z$  auf Grund von Formeln

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{apf_1(x)}{1+pf_1(x)} \\ \beta &= \frac{bqf_2(y)}{1+qf_2(y)} \\ \gamma &= \frac{cf_3(z)}{pq+f_3(z)} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

wobei  $g$  und  $p$  beliebige Konstanten sind. Dann entsteht aus Gleichung (19) die Gleichung

$$f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z) = -1. \quad (21)$$

Wenn wir dagegen in die Gleichung (19)

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{apf_1(x)}{1+pf_1(x)} \\ \beta &= \frac{bqf_2(y)}{1+qf_2(y)} \\ \gamma &= \frac{c}{1-pqf_3(z)} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

einsetzen, so erhalten wir

$$f_3 = f_1 f_2. \quad (23)$$

Es ist ein Vorteil der besprochenen nomographischen Tafel, daß die Gleichungen (20) und (22), die zur Bestimmung der Skalen

dienen, eine große Anzahl beliebig wählbarer Größen besitzen, die wir also so bestimmen können, daß die Skalen bezüglich der Ausdehnung und des Bereiches sich genau unseren Forderungen anpassen. Aus diesem Grunde ist eine Tafel nach Gleichung (23) oft bequemer als eine Tafel nach Gleichung (13) § 6, obgleich die letztere sich leichter konstruieren läßt.

Die Tafeln auf Grund der Formel (21), die in der Form

$$f_3(z) = \frac{1}{f_1(x)f_2(y)}$$

geschrieben ist, kann man mit Vorteil benutzen, wenn die Funktion  $f_3(z)$  als Produkt zweier Funktionen  $F_1(x)$  und  $F_2(y)$  für einen solchen Bereich gegeben ist, daß sie in ihm gleich  $\infty$  sind. In diesem Bereiche gehen die inversen Funktionen

$$f_1(x) = \frac{1}{F_1(x)}, \quad f_2(y) = \frac{1}{F_2(y)}$$

durch den Wert 0 hindurch.

## § 8. Tafeln mit krummlinigen Skalen. Allgemeine Gleichungen.

In nomographischen Tafeln von einem allgemeineren Typus als die bisher besprochenen sind die Skalen nicht auf Geraden, sondern auf Kurven aufgetragen. Durch Schnitt dieser Kurven mit einer anderen Kurve oder mit einem Kurvensystem (Schnittsystem) können wir eine Abhängigkeit zwischen Variablen, die den Schnittpunkten entsprechen, festsetzen. Meistens ist das Problem in umgekehrter Weise gestellt: Es ist die Abhängigkeit zwischen den Variablen gegeben und durch den Schnitt läßt sich der Wert einer der Variablen bestimmen, falls alle anderen in bestimmten Grenzen beliebig gewählt worden sind.

In Tafeln, die von d'Ocagne angegeben sind, ist die schneidende Kurve eine Gerade. Die Tätigkeit des Berechnens wird in diesen Tafeln zur Ansetzung des Lineals und Ablesung des Resultates auf einer der Skalen reduziert. Da eine Gerade durch zwei Punkte, die wir auf zwei krummlinigen Skalen wählen, bestimmt ist, so bestimmt ihr Schnittpunkt mit der dritten Skala den Wert der dritten Variablen. Mittels dieser Methoden können wir also Funktionen von drei Variablen berechnen, von denen wir eine (beliebige) als abhängige Variable, die zwei anderen als unabhängige Variable wählen.

Wenn wir als Schnittsystem eine Kurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung wählen, so können wir in derselben Weise die Funktionen von  $\frac{(n+1)(n+2)}{2} = p$  Variablen berechnen. Jedoch findet dieses System keine praktische Anwendung, da die Konstruktion einer Kurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung die durch  $(p-1)$  gegebene Punkte hindurchgeht, meistens komplizierter Natur ist und oft nicht leichter ist als die Berechnung der Funktion von  $p$ -Variablen. Dies bezieht sich sogar auch auf die Kurven zweiter Ordnung mit Ausnahme des Kreises. Wenn wir vier Skalen mit einem Kreise, der durch drei Punkte dieser Skalen bestimmt ist, schneiden würden, so könnten wir die Funktionen von vier Variablen berechnen; jedoch würden die Tafeln dieser Art praktisch den Nachteil haben, daß in Fällen, wo die drei beliebig gewählten Variablen Punkten entsprechen, die auf einer Geraden liegen oder von einer solchen Lage nicht merklich abweichen, der Radius des Schnittkreises, den man zwecks Erhaltens der vierten Variablen ziehen muß, so groß sein kann, daß sein Mittelpunkt sich außerhalb der Papierebene oder sogar des Zeichentisches befinden kann und die Konstruktion des Kreises beschwerlich wird. Aus diesem Grunde werden auch Tafeln, in welchen das Schnittsystem ein Kreis ist, nicht praktisch angewendet. Wenn wir alle Spezialfälle der Funktionen zweiter Ordnung durchgehen, so kommen wir an einen Spezialfall, in welchem die Funktion ein Produkt aus zwei linearen Gleichungen darstellt. Über diese Tafeln wird in § 15 gesprochen.

Wenn wir jetzt zu den Tafeln übergehen, in welchen das Schnittsystem eine Gleichung ersten Grades ist, so bekommen wir die Tafeln von d'Ocagne für drei Variable. Wie wir das in § 14 sehen werden, können wir mittels derselben in gewissen Fällen auch Funktionen von größerer Anzahl von Variablen berechnen. Im allgemeinen Falle sind die drei Kurven, aus denen die Tafel besteht, krummlinige Skalen, die wir mit  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  bezeichnen. Es seien ihre Gleichungen in einem beliebig angenommenen kartesischen Koordinatensystem  $O H E$ :

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \Phi_1(\xi) \\ \eta &= \Phi_2(\xi) \\ \eta &= \Phi_3(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Die Koordinaten von drei Punkten  $P_1 = (\eta_1, \xi_1)$ ,  $P_2 = (\eta_2, \xi_2)$ ,  $P_3 = (\eta_3, \xi_3)$ , die auf einer Geraden liegen, erfüllen die Gleichung

$$\eta_1(\xi_2 - \xi_3) + \eta_2(\xi_3 - \xi_1) + \eta_3(\xi_1 - \xi_2) = 0. \quad (25)$$

Stellen wir jetzt die Funktionen  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  mittels Parameter  $x, y, z$  so dar, daß

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } \Phi_1: \eta_1 = f_1(x) \quad \xi_1 = F_1(x) \\ \text{,, } \Phi_2: \eta_2 = f_2(y) \quad \xi_2 = F_2(y) \\ \text{,, } \Phi_3: \eta_3 = f_3(z) \quad \xi_3 = F_3(z) \end{array} \right\} \quad (26)$$

Nach Einführung dieser Beziehungen in die Gleichung (25) erhalten wir

$$f_1(F_2 - F_3) + f_2(F_3 - F_1) + f_3(F_1 - F_2) = 0. \quad (27)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Funktion  $T$  von drei Variablen  $x, y, z$ . Wir stehen also vor folgendem Problem:

Es ist eine Funktion gegeben

$$T(x, y, z) = 0, \quad (28)$$

und man soll eine Tafel konstruieren, die erlaubt, für zwei Variable die dritte zu berechnen. Falls die Funktion  $T$  sich so umformen läßt, daß sie die Form der Gleichung (27) annehmen kann, so erhalten wir

nach Eliminierung des Parameters  $x$  aus Funktion  $f_1$  und  $F_1$   
 „ „ „ „  $y$  „ „  $f_2$  „  $F_2$   
 „ „ „ „  $z$  „ „  $f_3$  „  $F_3$

die Gleichungen der drei krummlinigen Skalen  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ . Nachdem diese Kurven gezeichnet sind, tragen wir auf denselben die Skalen in Abhängigkeit von den Parametern  $x, y, z$  auf, und zwar: falls dem Parameter  $x'$  auf der Kurve  $\Phi_1$  der Punkt  $P'$  mit den Koordinaten  $\xi'_1 = f_1(x')$ ;  $\eta'_1 = f_2(y')$  (Abb. 28) entspricht, so bezeichnen wir diesen Punkt auf der Kurve als „Teilpunkt  $x'$ “ usw. Die in dieser Weise eingetragenen krummlinigen Skalen  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  stellen die gesuchte nomographische Tafel dar.

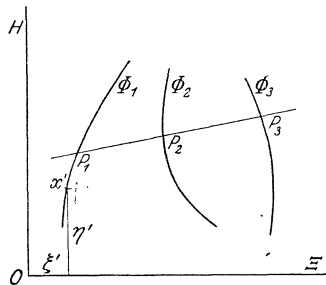


Abb. 28.

Eine allgemeine Methode, mittels derer man eine beliebige Funktion  $T$  so umformen könnte, daß sie die Form (27) annimmt, gibt es nicht. Diese Form ist jedoch so elastisch, daß bei den meisten Funktionen  $T$  sich eine solche Umformung durchführen läßt.

### § 9. Die Zentralprojektion einer krummlinigen Skala auf eine Gerade.

Ehe wir zu den Tafeln kommen, die zur Berechnung der Funktionen von drei Variablen dienen, halten wir uns bei der Anwendung der krummlinigen Skalen zur Berechnung der Funktionen zweier Variablen auf. Wie wir aus §§ 2 bis 4 wissen, kann man solche Funktionen mittels einer (geradlinigen) Doppelskala darstellen. Das Auftragen der Doppelskala für eine gebrochen-lineare Funktion (4) oder (5) können wir uns mittels Projizieren einer geradlinigen Skala auf eine andere geradlinige Skala erleichtern. Wir werden jetzt zeigen, daß mit Hilfe der Projektion von krummlinigen Skalen wir auch andere allgemeinere Funktionen bestimmen können.

Aus einem beliebig gewählten Perspektivitätszentrum ziehen wir die Geraden zu den Teilpunkten der gegebenen krummlinigen Skala bis zum Schnittpunkt mit einer gegebenen Geraden. In dieser Weise bekommen wir auf der Geraden eine neue Skala. Wählen wir das Koordinatensystem  $OEH$  so, daß sein Anfang gerade das Perspektivitätszentrum ist und daß eine von den Koordinatenachsen, z. B. die Achse  $OH$ , parallel zu der gegebenen Geraden ist. Aus dem allgemeinen Falle des § 8 bekommen wir den besprochenen durch Zusammenschrumpfen der Kurve  $\Phi_1$  in den Punkt  $O$  und durch Umformen der Kurve  $\Phi_3$  in eine zu  $OH$  parallele Gerade. Wir müssen also in der Gleichung (26) setzen:

$$f_1 = 0; \quad F_1 = 0; \quad F_3 = k,$$

wonach wir erhalten:

$$f_3 = k \frac{f_2}{F_2} \quad (29)$$

oder, wenn wir  $k$  in das Funktionszeichen  $f_3$  hineinbeziehen:

$$f_3 = \frac{f_2}{F_2} \quad (29a)$$

Dies ist die Grundgleichung für die Zentralprojektion einer krummlinigen Skala auf eine Gerade. Durch Eliminierung des Parameters  $y$  aus den Funktionen

$$\eta = f_2(y) \quad \text{und} \quad \xi = F_2(y)$$

erhalten wir die Gleichung der Kurve  $\Phi_2$  und tragen auf ihr die Skala in Abhängigkeit vom Parameter  $y$  auf;  $f_3$  stellt die Skala



auf der Geraden  $\Phi_3$  dar, in Abhängigkeit von  $z$ , wobei die Koordinaten des Teilpunktes  $z'$

$$\xi = k, \quad \eta = z'$$

sind; dadurch bekommen wir auf der Geraden  $\Phi_3$  eine Doppelskala.

Sehr oft nehmen wir bei der Konstruktion

$$\mu_\xi \dagger \mu_\eta$$

an, was manchmal gewisse Vorteile bietet. Wir müssen jedoch damit rechnen, daß wir dadurch den Charakter der Kurve  $\Phi_2$  ändern. So z. B. falls die Kurve  $\Phi_2$  ein Kreis ist, wird sie durch obige Annahme zur Ellipse.

Wenn wir die Gleichung (29) in der Form

$$\frac{f_3}{k} = \frac{f_2}{F_2}$$

schreiben, so sehen wir, daß dieselbe Beziehung zwischen den entsprechenden Maßstäben bestehen muß, d. h.

$$\frac{\mu(f_3)}{\mu(k)} = \frac{\mu(f_2)}{\mu(F_2)} \quad (30)$$

ist (s. S. 59).

**Beispiel I. Zentralprojektion eines Kreises auf eine Gerade.** Dieses Problem ist selbstverständlich nicht eindeutig, da wir einen Kreis ebenso wie jede andere Kurve in verschiedener Weise mittels Parameter darstellen können, oder, wenn wir uns in nomographischer Sprache ausdrücken: auf dem Kreise kann man eine unendliche Anzahl verschiedener Skalen auftragen, von welchen jede durch Projizieren eine andere Skala auf der Geraden  $\Phi_3$  bestimmt.

Die gebräuchlichsten Parametergleichungen des Kreises vom Radius  $r$  und Mittelpunkt  $S = (a, b)$  sind:

$$\begin{aligned} \xi = F_2 &= a + r \cos y, \\ \eta = f_2 &= b + r \sin y, \end{aligned}$$

wobei  $y$  Zentralwinkel bedeutet. Aus Gleichung (29) erhalten wir

$$f_3(z) = k \frac{b + r \sin y}{a + r \cos y},$$

30 Die Zentralprojektion einer krummlinigen Skala auf eine Gerade.

wobei zwischen den Maßstäben die Beziehung (30) bestehen muß. Auf der Abb. 29 ist die Beziehung

$$z^2 = \frac{1 + 3 \sin y}{2 + 3 \cos y}$$

dargestellt. Wenn wir

$$\xi = 2 + 3 \cos y; \quad \eta = 1 + 3 \sin y$$

annehmen, so erhalten wir die Gleichung des Kreises  $\Phi_2$ :

$$\Phi_2 = (\xi - 2)^2 + (\eta - 1)^2 - 3^2 = 0.$$

Mit

$$\mu_\xi = 15 \text{ mm}, \quad \mu_\eta = 15 \text{ mm}$$

zeichnen wir den Kreis und tragen auf demselben die Funktionskala  $\Phi_2$  in der Abhängigkeit vom Parameter  $y$  auf; wir bezeichnen also

mit  $0^\circ$  den Teilpunkt  $\xi = 5, \quad \eta = 1$

„  $90^\circ$  „ „  $\xi = 2, \quad \eta = 4$  usw.

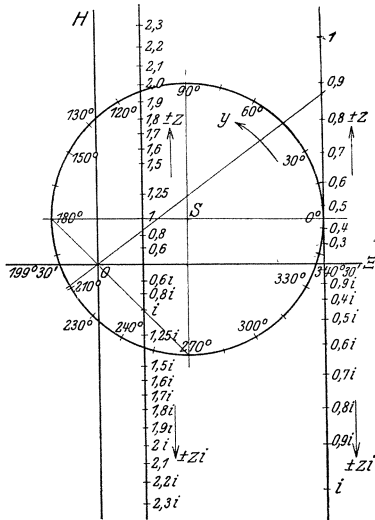


Abb. 29. 0,4 natürl. Größe.

Auf einer zur Achse  $OH$  parallelen und von ihr um  $k = 1$  Maßeinheiten entfernten Geraden tragen wir die Skala  $\Phi_3$  auf. Dabei wählen wir

$$\mu_k = \mu_z = 15 \text{ mm}.$$

Skala  $\Phi_3$  ist eine quadratische. Um die Ablesegenauigkeit für den Bereich der Variablen  $z$  von 0 bis 1 zu vergrößern, ziehen wir noch eine Skala für  $z$  in der Entfernung von fünf Einheiten (75 mm) von der Achse  $OH$ . Falls wir gleichzeitig den Maßstab für  $z$  fünfmal vergrößern, so bleibt, wie wir aus der Gleichung (30) ersehen, die Skala  $\Phi_2$  unverändert; so erhalten wir eine fünfmal genauere Skala für  $z$ .

Probe:  $y = 45^\circ, \quad z = 0,87.$

$$z^2 = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}} = \frac{6,24}{8,24}; \quad z = 0,87.$$

Zweite Lösung:  $y = 209^\circ$ ;

$$z^2 = \frac{1 + 3 \sin 209^\circ}{2 + 3 \cos 209^\circ}; \quad z = 0,85.$$

Die Punkte der Skala  $\Phi_3$  nach unten von der Achse  $O\mathcal{E}$  entsprechen den imaginären Werten der Variablen  $\pm z$ .

Probe:  $y = 180^\circ$ ;  $z^2 = \frac{1}{2-3} = -1$ ;  $z = \pm i$

$$y = 270^\circ; \quad z^2 = \frac{1-3}{2} = -1; \quad z = \pm i.$$

Bei diesen Beispielen werden wir etwas länger verbleiben, um die Eigenschaften der Projektion dieser Art kennen zu lernen. Wir sehen z. B., daß die nomographische Darstellung der Beziehung  $z^2 = \frac{1 + 3 \sin y}{2 + 3 \cos y}$  uns erlaubt, mit Leichtigkeit ihre Analyse zu bewerkstelligen. Wir lesen aus der Abb. 29 ab:

Für  $y = 0$  ist  $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; von  $y = 0$  bis  $y = 130^\circ$  wächst  $x$  von  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  bis  $\pm \infty$ , zuerst langsam, dann immer schneller. Für  $y > 130^\circ$  wird  $z$  imaginär und ändert sich von  $\pm \infty$  bis 0 bei weiterer Vergrößerung von  $y$ ; den Wert von 0 erreicht  $z$  für  $y = 199^\circ 30'$  [abgelesen von der Skala<sup>1)</sup>]. Von diesem Werte bis  $y = 230^\circ$  ist  $z$  reell und ändert sich von 0 bis  $\pm \infty$ ; von  $y = 230^\circ$  bis  $y = 340^\circ 30'$  ist  $z$  imaginär und durchläuft die Werte von  $\pm \infty$  bis 0; wenn sich schließlich  $y$  von  $340^\circ 30'$  bis  $360^\circ$  ändert, so nimmt  $z$  die reellen Werte von 0 bis  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  an.

Die Gleichungen (29) und (29a) stellen gleichzeitig auch die Lösung des umgekehrten Problems dar: der Zentralprojektion einer geradlinigen Skala auf eine Kurve. In dem im Beispiel 1 behandelten Spezialfall können wir somit mittels Projektion für jedes gegebene  $z$  den Wert von  $y$  finden. Um dieses mittels der gewöhnlichen Berechnungsweise zu finden, müßte man eine Reihe von Berechnungen vornehmen. Hier erhalten wir das Resultat durch die Ansetzung des Lineals.

Die Interpretation der Gleichungen (29) und (29a) für das umgekehrte Problem übergehen wir, weil sie der Interpretation für den vorigen Fall analog ist.

<sup>1)</sup> S. Bemerkung S. 11.

Durch die oben besprochene Projektion auf eine krummlinige Skala kommen wir zum Begriff der krummlinigen Doppelskala. Diese Skalen werden sehr selten angewendet, da man selten in der Praxis Funktionen antrifft, zu deren Darstellung die krummlinige Doppelskala bequemer als die geradlinige ist. Solche Funktionen sind unter anderm die Funktionen, die der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dy} = \sqrt{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2} \tag{31}$$

entsprechen; es ist dann nämlich die Interpolation zwischen den Teilpunkten sehr leicht.

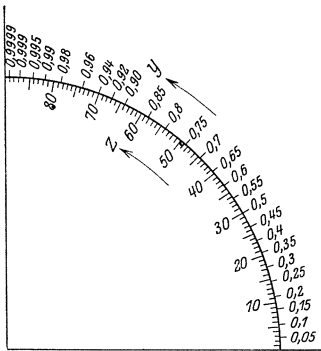


Abb. 30.

Abb. 30 gibt ein Beispiel einer krummlinigen Doppelskala für die Funktion  $z = \sin y$ .

Wir sehen, daß außer einer gewissen unbedeutenden Erleichterung bei der Ablesung diese Skala keine Vorteile gegenüber der geradlinigen Skala bietet.

Siehe auch Abb. 70.

Beispiel 2. In der Gleichung

$$z = \frac{y}{\alpha + a\sqrt{1-y^2}}$$

ist die Anwendung von geradlinigen Skalen unbequem und kompliziert. Wenn wir die Formel (29) anwenden, so erhalten wir

$$\eta = y, \quad \xi = \alpha + a\sqrt{1-y^2},$$

oder

$$\Phi_2 = \eta^2 + \frac{(\xi - \alpha)^2}{a^2} - 1 = 0.$$

Es ist also  $\Phi_2$  eine Ellipse mit den Achsen  $a$  und 1 und mit dem Mittelpunkt, der auf der Achse  $O E$  in der Entfernung  $\alpha$  von  $O$  liegt. Abb. 31 ist für  $a = 2$  und  $\alpha = 0$  gezeichnet, d. h. für Funktion

$$z = \frac{y}{2\sqrt{1-y^2}}.$$

Wenn wir  $\mu_\xi = \mu_\eta = 25$  mm setzen, so können wir die Ellipse zeichnen, auf welcher sich die krummlinige Skala  $\Phi_2$  befindet. Diese Skala tragen wir in Abhängigkeit vom Parameter  $y$  (s. z. B.

die Konstruktion des Teilpunktes 0,6). Die Skala für  $z$  tragen wir auf der um  $k = 1$  entfernten Geraden  $\Phi_3$  auf (linke Skala), wobei wir  $\mu_k = 25$  mm setzen. Auf der unteren Hälfte der Skala  $\Phi_3$  befinden sich die negativen Werte der Variablen  $z$ . Um eine größere Ablesegenauigkeit für den Bereich  $-1 < z < +1$  zu erhalten, verschieben wir die Skala  $\Phi_3$  für diesen Bereich noch um 25 mm nach rechts, wodurch wir eine zweimal genauere Skala erhalten (linke Skala).

Wenn wir

$$\mu_\xi = 25 \text{ mm}, \quad \mu_\eta = 2 \mu_\xi = 50 \text{ mm}$$

setzen, dann wird der Skalenträger  $\Phi_2$  ein Kreis (Abb. 31), auf welchem die Skala ebenfalls in Abhängigkeit vom Parameter  $y'$  aufgetragen ist. Falls wir  $\mu_k$  und  $\mu_\xi$  ohne Änderung lassen:  $\mu_k = \mu_\xi = 25$  mm, so erhalten wir aus Gleichung (30) für den Maßstab von  $z'$ :  $\mu_{z'} = 50$  mm (rechte Skala). Durch Verschiebung der Geraden  $\Phi_3$  um 25 mm nach rechts bekommen wir eine zweimal genauere Skala (rechte Skala) für den Bereich  $-1 < z' < +1$ .

Um wieviel bequemer eine Kreisskala ist als eine elliptische Skala, braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden.

Probe:

$$y = 0,8;$$

$$z = \frac{0,8}{2\sqrt{1-0,8^2}} = 0,677.$$

Aus der Zeichnung  $z = 0,67$ .

Beispiel 3.

$$z = \frac{\sin y}{y}.$$

Wir setzen

$$\eta = \sin y; \quad \xi = y$$

und erhalten als Gleichung der Kurve  $\Phi_2$ :

$$\eta = \sin \xi.$$

Wir wählen (Abb. 32)

$$\mu_\xi = 25 \text{ mm}; \quad \mu_\eta = 50 \text{ mm}$$

und

$$\mu_k = 25 \text{ mm}; \quad \mu_z = 50 \text{ mm},$$

Konorski, Nomographie.

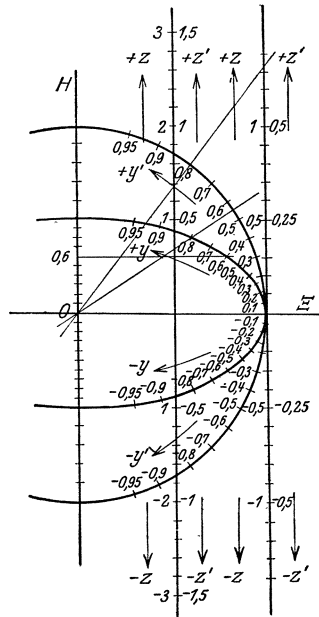


Abb. 31.  
0,5 natürl. Größe.

34 Die Zentralprojektion einer krummlinigen Skala auf eine Gerade.

bzw., um eine deutlichere Skala zu erhalten:

$$\mu_k = 50 \text{ mm}, \quad \mu_z = 100 \text{ mm}.$$

$$\text{Probe:} \quad y = 90^\circ = \frac{\pi}{2}; \quad z = \frac{2}{\pi} = 0,636.$$

Aus Abb. 32 können wir u. a. leicht ablesen

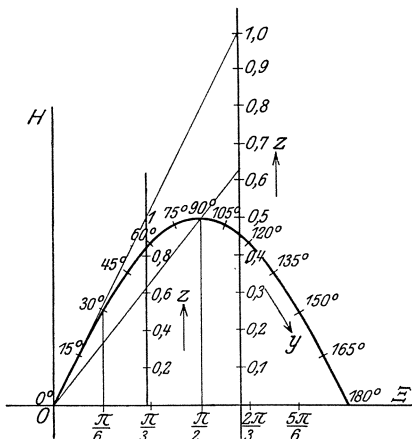


Abb. 32. 0,5 natürl. Größe.

$$\lim_{y=0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Wenn wir in der Gleichung (29) setzen

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= ky + l = \eta \\ F_2 &= my + n = \xi \end{aligned} \right\}, \quad (32)$$

so wird die Kurve  $\Phi_2$  zur Geraden

$$m(\eta - l) = k(\xi - n) \quad (33)$$

und wir bekommen dann eine Projektion einer Geraden auf eine Gerade wie in § 4 laut der Formel

$$f_3 = \frac{ky + l}{my + n}, \quad (33a)$$

die identisch ist mit der Formel (4). Es ist somit die hier besprochene Projektion eine Verallgemeinerung der Projektion von geradlinigen Skalen. Mittels einer Ellipse kann man einen Quotienten zweier Funktionen zweiter Ordnung darstellen, mittels anderer Kurven einen Quotienten beliebiger zwei Funktionen.

Die Gleichungen (32) verwenden wir bei Bestimmung solcher projektiver Skalen, bei denen es aus irgendwelchen Gründen schwer ist, mittels zeichnerischer Proben ein günstig liegendes Perspektivitätszentrum zu finden und die günstige Lage der Skalen zu erreichen. Wenn wir das Koordinatensystem und die Geraden, die den Gleichungen (32) entsprechen, aufzeichnen, so erhalten wir sofort eine allgemeine Übersicht darüber, unter welchen Bedingungen die Lösung des gegebenen Problems möglich bzw. günstig in graphischer Beziehung ist. Beispiel Abb. 33 stellt die Funktion

$$z = f_3(z) = \frac{y-1}{y+1}$$

dar. Wir setzen

$$\eta = y - 1; \quad \xi = y + 1$$

und bekommen als Gleichung der Geraden  $\Phi_3$

$$\xi - \eta = 2.$$

Dabei ist

$$\mu_\xi = \mu_\eta = \mu_k = 12,5 \quad (k = 1).$$

Aus der Zeichnung entnehmen wir

$$\mu_z = 12,5 \text{ mm},$$

$$\mu_y = \sqrt{12,5^2 + 12,5^2} = 17,7 \text{ mm}.$$

Die relative Lage der beiden Skalen auf der Abb. 33 kann ebenfalls, wie die relative Lage der Bereiche beider Variablen auf der Skala, ungünstig sein; in diesem Falle führen wir eine Reihe gewisser Lagenumformungen aus. Es erstrecke sich der Bereich der Variablen  $y$ , für welchen die Skala  $z$  aufgetragen werden soll, von  $y = 2$  bis  $y = 7$ . Den Winkel zwischen den Skalen wählen wir meistens bei der Projizierung einer geradlinigen Skala auf eine geradlinige Skala ca.  $15$  bis  $25^\circ$ , und zwar um nicht zu flache Schnitte zu erhalten; zu diesem Zwecke vergrößern wir den Maßstab  $\mu_y$  viermal und lassen  $\mu_\xi$  unverändert, so daß

$$\mu'_\xi = 12,5 \text{ mm}; \quad \mu'_\eta = 50 \text{ mm}.$$

Dann ist

$$\mu'_z = 50 \text{ mm};$$

$$\mu'_y = \sqrt{12,5^2 + 50^2} = 51,6 \text{ mm}.$$

Hierauf verschieben wir die Gerade  $\Phi_3$  vom Punkt  $A$  bis Punkt  $B$  (Abb. 34), so daß sie durch den Teilpunkt „2“ der Skala  $y$  (der Anfangspunkt des Bereiches) hindurchgeht, und damit vergrößern wir die Entfernung der Skala  $z$  von der Ordinatenachse  $\frac{OB}{OA}$  mal oder auf der Abbildung 34 dreimal. Dadurch vergrößert

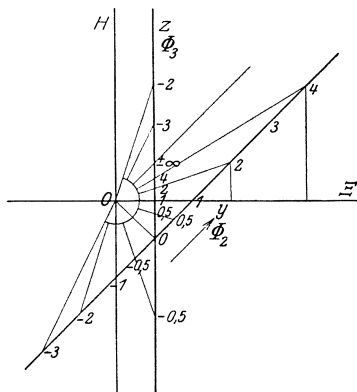


Abb. 33. 0,4 natürl. Größe.

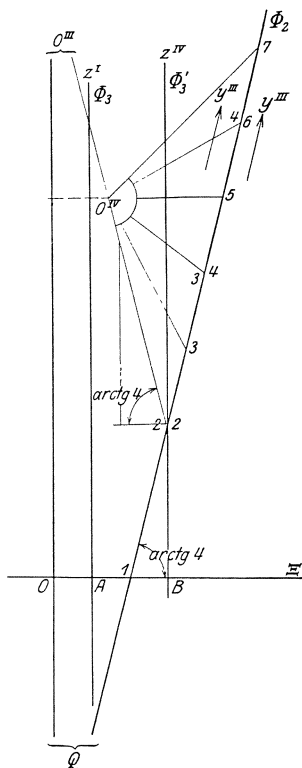


Abb. 34.  
0,4 natürl. Größe.

sich ebenfalls dreimal der Maßstab  $\mu_z''$  der verschobenen Skala  $z$  im Vergleich mit dem Maßstabe der vorherigen Skala, die durch den Punkt  $A$  hindurchgeht. Der Maßstab für  $y$  bleibt unverändert, so daß

$$\mu_z'' = 3 \cdot 50 = 150 \text{ mm}; \quad \mu_y'' = 51,6 \text{ mm.}$$

Mittels dieser Umformungen können wir beliebig den Winkel zwischen den Skalen und ihren gemeinsamen Punkt, d. h. den Anfangspunkt der Bereiche, wählen. Die Endpunkte der Bereiche erhalten wir bei gegebenen Bereichen durch endgültige Festsetzung der beiden Maßstäbe  $\mu_z$  und  $\mu_y$ . Von ihrem Werte hängt die Lage des Perspektivitätszentrums ab. Zur Durchführung der weiteren Änderungen in der relativen Lage des Perspektivitätszentrums und der beiden Skalen, deren Winkel, wie auch der Anfangspunkt der Bereiche, schon festgesetzt sind, verbleibt uns somit als das einzige Mittel: die gleichzeitige oder relative Änderung der beiden Maßstäbe  $\mu_y$  und  $\mu_z$ . Die durch diese Änderungen bewirkten Folgen sind durch zwei Hilfssätze zusammengefaßt.

Hilfssatz 1. Bei gleichzeitiger Änderung der Maßstäbe der beiden Skalen in einer bestimmten Zentralprojektion geradliniger Skalen bewegt sich das Perspektivitätszentrum auf einer Geraden, die durch den Schnittpunkt der Skalen hindurchgeht. Die verhältnismäßige Änderung der Lage des Perspektivitätszentrums auf dieser Geraden ist gleich der verhältnismäßigen Änderung des Maßstabes einer der Skalen.

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir an, daß die Skalen  $z$  und  $y$  Achsen eines (schiefwinkligen) Koordinatensystems sind. Für den Punkt  $y = q$  der Skala  $y$  bekommen wir folgende Gleichung der Schnittgeraden

$$\frac{z}{\mu_z \frac{kq + l}{mq + n}} + \frac{y}{\mu_y q} = 1; \quad (\alpha)$$

für den Punkt  $y = p$  der Skala  $y$  ist die Schnittgerade:

$$\frac{z}{\mu_z \frac{kp + l}{mp + n}} + \frac{y}{\mu_y p} = 1. \quad (\beta)$$

Es seien die Koordinaten des Schnittpunktes dieser beiden Geraden (Perspektivitätszentrums), die sich aus der Auflösung der Gleichungen  $(\alpha)$  und  $(\beta)$  ergeben,  $z_0$  und  $y_0$ .



Ändern wir proportionell die Maßstäbe der beiden Skalen in  $\mu'_z$  und  $\mu'_y$ , so daß

$$\mu'_z = c \mu_z; \quad \mu'_y = c \mu_y,$$

dann sind die Gleichungen der Schnittgeraden für die Punkte  $y = q$  und  $y = p$  der Skala  $y$

$$\frac{z'}{c \mu_z \frac{kq+l}{mq+n}} + \frac{y'}{c \mu_y q} = 1 \quad (\gamma)$$

und

$$\frac{z'}{c \mu_z \frac{kp+l}{mp+n}} + \frac{y'}{c \mu_y p} = 1. \quad (\delta)$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes dieser Geraden (neues Perspektivitätszentrum) sind offenbar

$$z'_0 = c z_0; \quad y'_0 = c y_0.$$

Abb. 35 dient als Illustration für diesen Satz. Es ist auf ihr die projektive Skala

$$z = \frac{y+1}{2y+5}$$

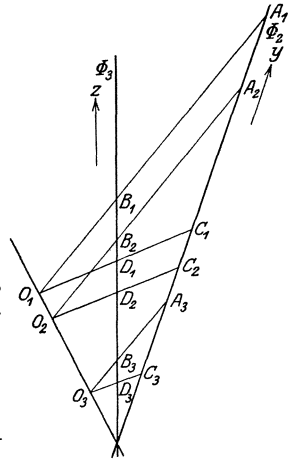


Abb. 35.  
0,4 natürl. Größe.

dargestellt, wobei die Punkte  $A_1, A_2, A_3$  bzw.  $B_1, B_2, B_3$  den Werten  $y = 5$  bzw.  $z = 0,4$  entsprechen bei den Maßstäben  $\mu_y = 30, 25, 10$  mm und die Punkte  $C_1, C_2, C_3$  bzw.  $D_1, D_2, D_3$  den Werten  $y = 2,5$  bzw.  $z = 0,35$  entsprechen bei den Maßstäben wie oben:  $\mu_y = 30, 25, 10$  mm.

Der den beiden Skalen gemeinsame Punkt  $S$  entspricht den Werten  $y = 0$  und  $z = 0,2$ .

Hilfssatz 2. Wenn wir in einer bestimmten Zentralprojektion geradliniger Skalen den Maßstab einer Skala ändern und den Maßstab der zweiten Skala unverändert lassen, so bewegt sich das Perspektivitätszentrum auf einer Geraden, die zu jener Skala parallel ist, deren Maßstab geändert wurde. Die verhältnismäßige Lagenänderung des Perspektivitätszentrums auf dieser Geraden ist gleich der verhältnismäßigen Änderung des Maßstabes.

Wenn wir wieder annehmen, daß die Skalen  $z$  und  $y$  Achsen des Koordinatensystems sind, so sind die Gleichungen der Schnitt-

geraden, die durch den Punkt  $y = q$  bzw. durch den Punkt  $y = p$  der Skala  $y$  hindurchgehen:

$$\frac{z}{\mu_z \frac{kq + l}{mq + n}} + \frac{y}{\mu_y q} = 1 \quad (\alpha)$$

oder

$$\frac{z}{\mu_z \frac{kp + l}{mp + n}} + \frac{y}{\mu_y p} = 1. \quad (\beta)$$

Die Gleichungen der Schnittgeraden, die durch dieselben Punkte der Skala  $y$  hindurchgehen bei ungeändertem Maßstab  $\mu_y$  der Skala  $y$  und bei Maßstab

$$\mu'_z = c\mu_z$$

der Skala  $z$ , sind

$$\frac{z'}{c\mu_z \frac{kq + l}{mq + n}} + \frac{y'}{\mu_y q} = 1 \quad (\gamma)$$

und

$$\frac{z'}{c\mu_z \frac{kp + l}{mp + n}} + \frac{y'}{\mu_y p} = 1. \quad (\delta)$$

Aus obigem ergibt sich, daß zwischen den Koordinaten  $y_0, z_0$  des Schnittpunktes der Geraden  $\alpha$  und  $\beta$  mit den Koordinaten  $y'_0, z'_0$  des Schnittpunktes der Geraden  $\gamma$  und  $\delta$  die Beziehungen bestehen:

$$z'_0 = cz_0; \quad y'_0 = y_0.$$

Abb. 36 stellt ein Zahlenbeispiel für diesen Hilfssatz vor, auf die Funktion

$$z = \frac{y + 1}{2y + 5}$$

angewendet. Die Punkte  $A$  und  $C$  der Skala  $y$  entsprechen den Werten  $y = 5$  und  $y = 2,5$  bei Maßstab  $\mu_y = 20$  mm. Die Punkte  $B_1, B_2, B_3$  entsprechen den Werten  $z = 0,4$  bzw.  $z = 0,35$  bei Anwendung der Maßstäbe  $\mu_z = 500, 400, 200$  mm. Punkt  $S$  (Anfangspunkt der Bereiche) entspricht den Werten  $y = 0, z = 0,2$ .

Wenn wir diese Hilfssätze auf die projektive Skala  $z = \frac{y - 1}{y + 1}$  anwenden, können wir nunmehr, ohne den Schnittpunkt der Skalen und den durch sie gebildeten Winkel zu ändern, das Perspektivitätszentrum  $O$  (Abb. 34) längs einer zur Skala  $z$  parallelen

Geraden  $OH$  bis zum Punkt  $O'''$  verschieben und hierauf denselben längs der Geraden  $O'''S$  (Punkt  $S = \text{Teilpunkt } „2“$ ) bis zum Punkt  $O^{IV}$  verschieben, je nachdem wie es für unsere Verhältnisse günstig erscheint. Dabei ändern sich jedoch in besprochener Weise die Maßstäbe. So werden die Maßstäbe  $\mu_z''$  und  $\mu_y''$  für Punkt  $O'''$ :

$$\mu_z''' = \frac{QO'''}{QO} \mu_z'' = \frac{QO + OO'''}{QO} \mu_z'' = \frac{100 + 200}{100} 150 = 450 \text{ mm};$$

$$\mu_y''' = \mu_y'' = 51,6 \text{ mm};$$

für den Punkt  $O^{IV}$  erhalten wir:

$$\mu_z^{IV} = \frac{O^{IV}S}{O'''S} \mu_z''' = \frac{1}{2} \mu_z''' = 225 \text{ mm};$$

$$\mu_y^{IV} = \frac{O^{IV}S}{O'''S} \mu_y''' = \frac{1}{2} \mu_y''' = 25,8 \text{ mm}.$$

Da wir den Punkt  $O'''$  ziemlich weit auf der Achse  $OH$  ( $\eta_{O'''} = 200$ ) gewählt haben und derselbe außerhalb der Zeichnung zu liegen kommt, so führen wir die Gerade  $O'''S$  unter Winkel  $\varphi$  zur Abszissenachse, wobei sich  $\varphi$  aus

$$\text{tg } \varphi = \frac{\eta_{O'''} - \eta_s}{OB} = \frac{200 - 50}{3 \cdot 12,5} = 4$$

berechnen läßt.

Probe:

$$\text{Für } y_1 = 7 \text{ ist } z_1 = \frac{3}{4}$$

$$„ y_0 = 2 \text{ „ } z_0 = \frac{1}{3}.$$

Bemerkung: Normalerweise berechnen wir nicht beim Auftragen der projektiven Skala alle Maßstäbe  $\mu_z$  und  $\mu_y$ , so wie wir es jetzt gemacht haben, sondern führen sämtliche Umformungen graphisch aus, was selbstverständlich viel kürzer dauert.

Beispiel 2. Abb. 37 stellt die projektive Skala

$$z = \frac{1}{y}$$

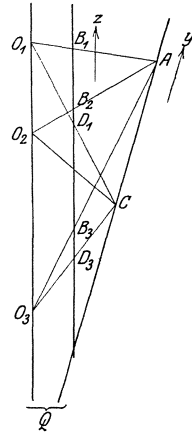


Abb. 36.  
0,4 natürl. Größe.

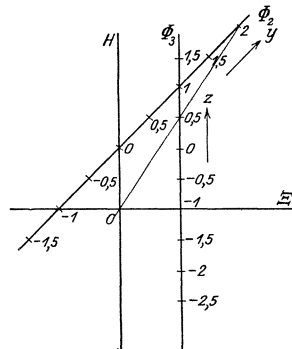


Abb. 37.  
0,4 natürl. Größe.

dar. Um diese Funktion mittels Koordinatensystems darzustellen, schreiben wir sie z. B. in der Form

$$z + 1 = \frac{y + 1}{y},$$

wonach wir erhalten:

$$\begin{aligned} \eta &= y + 1; & \xi &= y \\ \eta &= \xi + 1. \end{aligned}$$

Den Anfangspunkt der Skala  $z$  verschieben wir um 1 nach oben. In der Zeichnung ist angenommen:

$$\mu_\xi = \mu_\eta = 20 \text{ mm.}$$

$$\text{Probe: } y = 2, \quad z = 0,5.$$

Durch die oben besprochenen Umformungen können wir das Perspektivitätszentrum beider Skalen, den Anfangspunkt und die Endpunkte der Bereiche so verschieben, daß sie unseren Erfordernissen entsprechen.

## § 10. Zentralprojektion einer krummlinigen Skala auf eine Kurve.

Es sei wiederum das Perspektivitätszentrum als Anfangspunkt des Koordinatensystems gewählt. Wenn wir in Gleichung (27)

$$f_1 = F_1 = 0$$

setzen, erhalten wir die Grundgleichung

$$\frac{f_3}{F_3} = \frac{f_2}{F_2}, \quad (34)$$

wobei die Gleichungen der beiden krummlinigen Skalen  $\Phi_3$  und  $\Phi_2$  durch Eliminierung der Parameter  $y$  und  $z$  aus den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \eta &= f_3(z); & \eta &= f_2(y) \\ \xi &= F_3(z); & \xi &= F_2(y) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

erhalten werden. Bezeichnen wir die linke Seite der Gleichung (34) mit  $\psi(z)$  und vertauschen wir in dieser Funktion  $z$  mit  $u$ . Wir können dies tun, da in der gebrochenen Funktion  $\frac{f_3}{F_3}$  die Variable  $z$  den Charakter eines Parameters hat, der zur Erlangung der Gleichung  $\Phi_3$  eliminiert wird. Wir schreiben ferner:

$$\psi(u) = \frac{f_3(z)}{F_3(z)}; \quad \psi(u) = \frac{f_2(y)}{F_2(y)}. \quad (34a)$$

Wenn wir  $\psi(u)$  als geradlinige Skala annehmen, führen wir die Projektion einer krummlinigen Skala auf eine Kurve zu zwei Projektionen einer krummlinigen Skala auf eine Gerade zurück. Dies folgt auch unmittelbar aus Abb. 38. in welcher wir, um die Projektion der krummlinigen Skala  $z$  auf die Kurve  $\Phi_2$  zu erhalten, die Skala  $z$  auf die Gerade  $u$  und hierauf die erhaltene Skala  $u$  auf die Kurve  $\Phi_2$  mittels Formeln (34a), aus welchen die Gleichung (34) folgt, projizieren. Über Maßstäbe s. unten S. 59.

Beispiel:

$$\operatorname{tg} y = \frac{az}{\sqrt{z+b}}$$

Wir setzen

$$\eta = az$$

und

$$\xi = \sqrt{z+b}$$

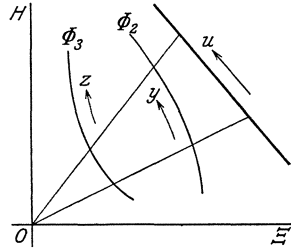


Abb. 38.

und erhalten als Gleichung der Kurve  $\Phi_2$  die Parabel

$$\eta = a\xi^2 - acb.$$

Anstatt auf der geradlinigen Skala die Funktion  $\operatorname{tg} \varphi$  aufzutragen, setzen wir

$$\operatorname{tg} y = \frac{r \sin y}{r \cos y}$$

und erhalten als Gleichung der Kurve  $\Phi_3$  den Kreis

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2$$

mit beliebigem Radius. Abb. 39 stellt die Tafel für

$$a = 0,25 \quad \text{und} \quad b = 4,$$

d. h. für

$$\operatorname{tg} y = \frac{z}{4\sqrt{z+4}}$$

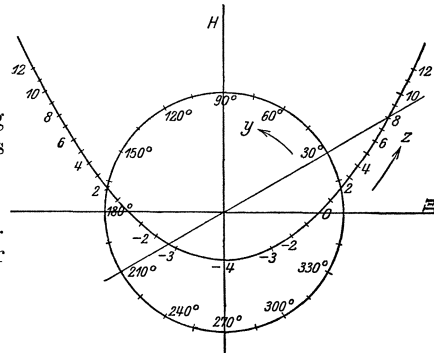


Abb. 39. 0,4 natürl. Größe.

dar. Die Konstruktion dieser Tafel versteht sich von selbst. Auf der Abb. 39 wurde angenommen

$$\mu_\xi = \mu_\eta = 16 \text{ mm.}$$

Probe: Für  $z = 8$  ist  $y = 30^\circ$ ,  
 „  $z = -2,65$  „  $y = 210^\circ$ .

## § 11. Die nomographischen Tafeln mit einer krummlinigen Skala.

Aus der allgemeinen Gleichung (27) kann man mit Leichtigkeit die Beziehungen (9), (13) und (16) durch entsprechende Einsetzungen erhalten.

So setzen wir z. B. für die Tafeln mit drei parallelen Geraden, indem wir annehmen, daß eine von ihnen die Achse  $OH$  sei:

$$F_1 = 0; \quad F_2 = k_2; \quad F_3 = k_3,$$

wobei wir erhalten

$$f_1(k_2 - k_3) + f_2 k_3 - f_3 k_2 = 0$$

oder, nachdem die Konstanten in die Funktionszeichen einbezogen werden, die Beziehung (9).

Wenn wir in die Gleichung (27) für zwei parallele Geraden wie oben einsetzen:

$$F_1 = 0; \quad F_3 = k_3$$

und für die dritte, sie schneidende:

$$f_2 = k_2 F_2,$$

so erhalten wir:

$$f_1(F_2 - k_3) + k_2 k_3 F_2 - f_3 k_2 F_2;$$

wir setzen noch

$$F_2 = \frac{k_3}{\varphi_2 + 1}$$

und erhalten die Gleichung

$$-k_3 f_1 \varphi_2 + k_2 k_3^2 - k_2 k_3 f_3 = 0,$$

welche, nachdem die Konstanten in die Funktionszeichen einbezogen wurden, die Form der Gleichung (13) annimmt.

Im Falle von drei sich in einem Punkte schneidenden Skalen wählen wir die Geraden  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  als Koordinatenachsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems, setzen in die Gleichung (27)

$$F_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = k_3 F_3$$

und erhalten unmittelbar die Gleichung (16).

Wenn wir eine Tafel konstruieren wollen, die aus zwei parallelen Geraden und einer Kurve bestehen soll, so setzen wir in der Gleichung (27), indem wir eine von diesen Geraden, z. B.  $\Phi_1$  als Koordinatenachse annehmen:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = k_2$$

und erhalten

$$f_1(k_2 - F_3) + f_2 F_3 - f_3 k_2 = 0$$

oder

$$F_3(f_2 - f_1) + k_2 f_1 + k_2 f_3 = 0. \quad (36)$$

Um den allgemeinen Typus, dem diese Gleichung entspricht, zu finden, schreiben wir

$$F_3 = k_2 \Psi_3; \quad f_2 = -\Psi_2; \quad f_1 = \Psi_1; \quad f_3 = -\Theta_3$$

und erhalten

$$\Psi_1 + \Theta_3 + \Psi_2 \Psi_3 + \Psi_1 \Psi_3 = 0. \quad (37)$$

Wenn wir in dieser Formel  $x$  und  $y$  als beliebig wählbare Größen ansehen, so stellen sie eine Gleichung für  $z$  dar, die sich in oben dargelegter Weise nomographisch auflösen läßt.

Den Hauptunterschied zwischen der Beziehung (37) und den Beziehungen, die wir für die Tafeln mit geradlinigen Skalen erhalten haben, ist, daß Gleichung (37) eine Funktion

$$T(x, y, z) = 0$$

ist, die wir nicht in der Form

$$R(z) = S(x, y)$$

schreiben können, während die Funktionen, die sich durch Tafeln mit geradlinigen Skalen darstellen lassen, sich immer in diese Form bringen ließen.

Beispiel: Es ist die trinomische Gleichung

$$z^n + a z^k + b = 0, \quad k < n,$$

nomographisch darzustellen zwecks Berechnung von  $z$  für die gegebenen  $a$  und  $b$ .

Wenn wir diese Gleichung mit der Gleichung (36) vergleichen, so können wir schreiben

$$z^n = -k_2 f_3; \quad z^k = F_3 = \xi;$$

$$a = f_2(y) - f_1(x) = y - x;$$

$$b = f_1 k_2.$$

$k_2$  ist die Entfernung der Geraden  $\Phi_2$  vom Anfangspunkt des Koordinatensystems; wir wählen  $k_2$  auf der Abb. 40 gleich 1, wobei wir als Maßeinheit 20 mm annehmen ( $\mu_\xi = \mu_\eta = 20$  mm).

Die Gleichung der Kurve  $\Phi_3$  folgt aus

$$\eta = f_3 = -z^n; \quad \xi = F_3 = z^k$$

und ist

$$-\eta = (\xi)^{n/k}.$$

Die Koeffizienten  $a$  und  $b$  berechnen wir aus

$$\begin{array}{l|l} a = y - x & x = b \\ b = x & y = a - b \end{array}$$

Die Abb. 40 ist gezeichnet für den Fall  $n = 2k$ ; wir erhalten dann für  $\Phi_2$  die Parabel

$$-\eta = \xi^2.$$

Die Skala auf dieser Parabel ändert sich mit der Größe von  $k$ . Auf der Abb. 40 sind auf der Parabel zwei Skalen eingetragen, und zwar die Skalen

für  $k = 1$  (innere Skala  $z$ )

für  $k = 2$  (äußere Skala  $z'$ ).

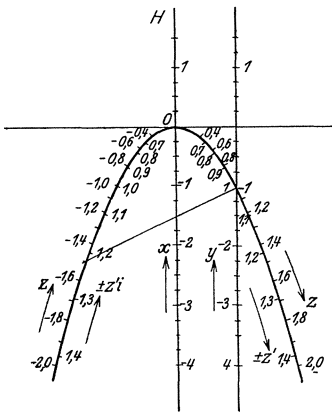


Abb. 40.  
0,4 natürl. Größe.

In diesem letzteren Falle (biquadratische Gleichung) finden wir auf dem linken Parabelaste die imaginären Werte der Wurzeln.

Probe:  $k = 1$ .

$$x = -1,5; \quad y = -1; \quad a = 0,5;$$

$$b = -1,5;$$

$$z^2 + 0,5z - 1,5 = 0;$$

$$z_1 = -1,5, \quad z_2 = 1;$$

$$(-1,5)^2 - 0,5 \cdot 1,5 - 1,5 = 0;$$

$$1^2 + 0,5 \cdot 1 - 1,5 = 0.$$

Dasselbe Problem können wir auch auf andere Weise lösen, z. B. mittels der gleichseitigen Hyperbel. Durch Einsetzen von

$$F_3 = \xi = \frac{1}{z^k}; \quad -f_3 = -\eta = z^k; \quad k_2 = 1$$

wird die Gleichung (36) zu

$$\frac{1}{z^k} (f_2 - f_1) + f_1 + z^k = 0.$$

Es ist dann

$$\Phi_2 = \eta + \frac{1}{\xi} = 0;$$

$$f_2(y) - f_1(x) = b; \quad f_1(x) = a.$$

Wenn wir setzen

$$f_2(y) = y; \quad f_1(x) = x,$$



so erhalten wir für die Berechnung von  $a$  und  $b$ :

$$\begin{array}{l|l} b = y - x & y = b + a \\ a = x & x = a. \end{array}$$

Abb. 41 stellt die Konstruktion der entsprechenden nomographischen Tafel dar, wobei

$$\mu_\xi = \mu_\eta = 20 \text{ mm.}$$

Probe:

$$x = 1,5; \quad y = 0,5;$$

$$a = 1,5; \quad b = -1;$$

$$z^2 + 1,5z - 1 = 0;$$

$$z_1 = -2; \quad z_2 = 0,5;$$

$$(0,5)^2 + 1,5 \cdot 0,5 - 1 = 0;$$

$$(-2)^2 - 1,5 \cdot 2 - 1 = 0.$$

Beide Tafeln (Abb. 40 und 41) haben den Nachteil, daß man, um die Wurzeln der Gleichung zu bestimmen, erst die — zwar sehr einfachen — Funktionen  $x$  und  $y$  der Koeffizienten  $a$  und  $b$  berechnen muß. Wenn uns daran liegt, die Skalen gleich für  $a$  und  $b$  zu erhalten, schreiben wir die Gleichung (36) in der Form

$$k_2 \frac{f_3}{F_3} + f_1 \left( 1 - \frac{k_2}{F_3} \right) - f_2 = 0.$$

Wenn wir diese Gleichung mit

$$z^n + a z^k + b = 0$$

vergleichen, so erhalten wir

$$k_2 = 1; \quad \frac{f_3}{F_3} = z^n; \quad 1 - \frac{1}{F_3} = z^k;$$

$$f_1 = a; \quad f_2 = -b;$$

und daraus

$$F_3 = \xi = \frac{1}{1 - z^k}, \quad f_3 = \eta = \frac{z^n}{1 - z^k}.$$

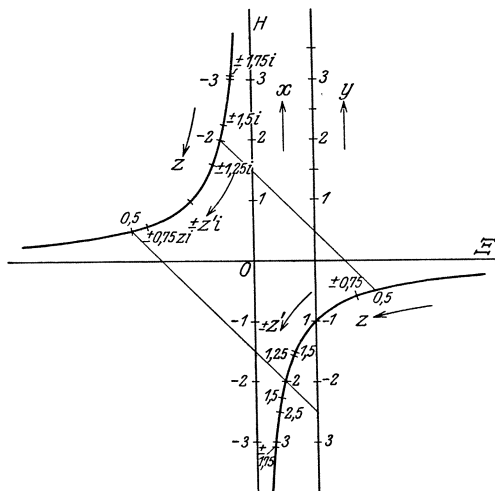


Abb. 41. 0,4 natürl. Größe.

Für die Kurve  $\Phi_3$  erhalten wir durch Eliminierung von  $z$  aus den beiden letzteren Beziehungen die Gleichung

$$\eta = \xi \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^{n/k}.$$

Abb. 42 stellt die auf dieser Basis konstruierte nomographische Tafel für  $n/k = 2$  mit  $\mu_\xi = 100$  mm,  $\mu_\eta = 10$  mm dar. Die Skala ist für  $k = 1$  eingetragen.

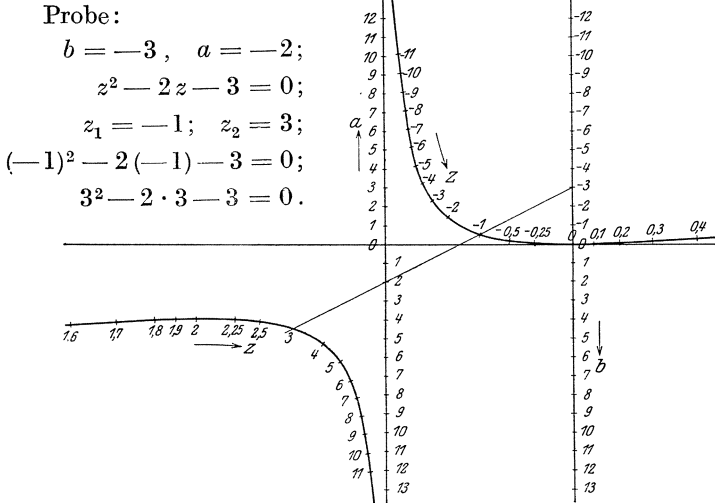


Abb. 42. 0,4 natürl. Größe.

Diese nomographische Tafel läßt sich nicht für Gleichungen verwenden, für welche eine der Wurzeln gleich oder nahezu gleich  $+1$  ist ( $\xi = \pm\infty$ ). In diesem Falle müssen wir die Tafeln Abb. 40, 41 oder 44 verwenden.

Beispiel 2.

$$\operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} - \alpha \operatorname{tg} \frac{z}{2} + \beta = 0.$$

Wir könnten diese Formel als eine Gleichung zweiten Grades auffassen und sie wie oben mittels Parabel, Hyperbel oder anderen auflösen. Dann aber müßten wir noch das Argument der Funktion  $\operatorname{tg} \frac{z}{2}$  berechnen, was wir lieber vermeiden möchten; dies fällt uns um so leichter, als die trigonometrischen Funktionen sich meistens mit Leichtigkeit mittels Kreisskala darstellen lassen.

Wir setzen  $\alpha = \frac{2}{x}$  und  $\beta = \frac{y}{x}$  und formen die obige Gleichung um in

$$(1 + \cos z)(y - x) + 2x - 2 \sin z = 0,$$

wonach wir durch Vergleichung mit (36) finden:

$$\left. \begin{array}{l} \eta = f_3 = \sin z \\ \xi = F_3 = 1 + \cos z \end{array} \right\} \Phi_3 = \eta^2 + (\xi - 1)^2 - 1 = 0$$

$$f_2 = y; \quad f_1 = x; \quad k_2 = 2.$$

Abb. 43 stellt die entsprechende nomographische Tafel dar, wobei sämtliche Maßstäbe gleich 40 mm sind. Anstatt einer Skala für  $x$  tragen wir auf der Achse  $OH$  gleich eine Skala für  $\alpha$  auf.

Probe 1.

Probe 2.

$\alpha = 2; \quad \frac{2\beta}{\alpha} = -1; \quad \beta = -1;$	$\alpha = -2; \quad \frac{2\beta}{\alpha} = 1; \quad \beta = -1;$
$z = 135^\circ; \quad z = -45^\circ;$	$z = 45^\circ; \quad z = -135^\circ;$
$\operatorname{tg} 67,5 = 2,415; \quad \operatorname{tg} 22,5 = -0,414;$	$(0,414)^2 + 2 \cdot 0,414 - 1 = 0;$
$(2,415)^2 - 2 \cdot 2,415 - 1 = 0;$	$(2,415)^2 - 2 \cdot 2,415 - 1 = 0.$
$(0,414)^2 + 2 \cdot 0,414 - 1 = 0.$	

In ähnlicher Weise können wir nomographische Gleichungen höheren Grades auflösen. Alle Koeffizienten dieser Gleichungen außer zweien müssen konstant sein. Zwei können beliebig wählbar sein. Diese Eigenschaft liegt in der Natur der besprochenen nomographischen Tafeln, die die Funktionen von höchstens drei Variablen zu berechnen erlauben.

In den nomographischen Tafeln mit einer krummlinigen und zwei sich schneidenden geradlinigen Skalen können wir die letzteren als Achsen eines (schiefwinkligen) Koordinatensystems annehmen und

$$F_1 = 0; \quad f_2 = 0$$

setzen. Aus Gleichung (27) erhalten wir dann

$$f_1 F_2 = f_1 F_3 + f_3 F_2 \quad (38)$$

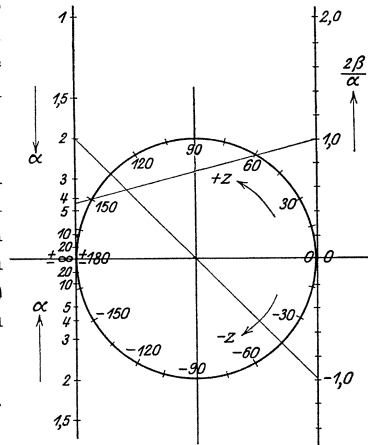


Abb. 43. 0,4 natürl. Größe.

oder

$$1 = \frac{F_3}{F_2} + \frac{f_3}{f_1}, \quad (38a)$$

eine Gleichung, die oft Verwendung findet.

Beispiel: Wenn wir die Gleichung

$$z^n + az^k + b = 0$$

mit der Gleichung (38), in der Form

$$F_3 + \frac{F_2}{f_1} f_3 - F_2 = 0$$

geschrieben, vergleichen, so erhalten wir

$$F_3 = \xi = z^n; \quad f_3 = \eta = z^k;$$

$$a = \frac{F_2}{f_1}; \quad F_2 = -b$$

und daraus

$$f_1 = -\frac{b}{a}.$$

Abb. 44 stellt den Spezialfall  $n = 3, k = 1$  dar, d. h. die Gleichung

$$z^3 + az + b = 0.$$

Die Parametergleichungen der Kurve  $\Phi_3$  sind

$$\xi = z^3; \quad \eta = z,$$

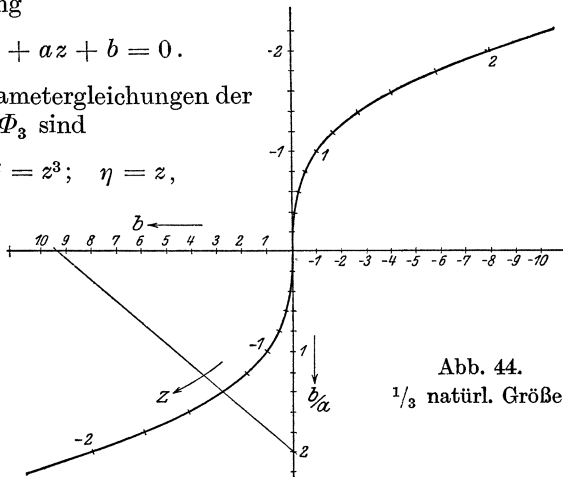


Abb. 44.  
 $\frac{1}{3}$  natürl. Größe.

und aus ihnen folgt

$$\Phi_3 = \eta - \xi^{1/3} = 0.$$

In Abb. 44 ist angenommen

$$\mu_\eta = 40 \text{ mm}; \quad \mu_\xi = 10 \text{ mm}.$$

Probe:  $b = 9,5; \quad \frac{b}{a} = 2; \quad a = 4,75;$   
 $z = -1,41;$   
 $z^3 + 4,75 z + 9,5 = 0;$   
 $-1,41^3 - 4,75 \cdot 1,41 + 9,5 = 0,005.$

## § 12. Die nomographischen Tafeln mit zwei und drei krummlinigen Skalen.

Wenn wir in Tafeln mit zwei Kurven und einer Geraden die letztere als Achse  $OH$  des Koordinatensystems annehmen und dementsprechend in Gleichung (27)

$$F_1 = 0$$

setzen, so erhalten wir

$$F_3(f_2 - f_1) - F_2(f_3 - f_1) = 0. \quad (39)$$

Wenn wir diese Gleichung in der Form

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{f_3 - f_1}{f_2 - f_1} \quad (39a)$$

schreiben und sie mit der Gleichung (36)

$$\frac{F_3}{k_2} = \frac{f_3 - f_1}{f_2 - f_1}$$

vergleichen, so ersehen wir, in welcher Richtung die Verallgemeinerung der letzteren Gleichung gegangen ist.

Beispiel: In der Funktion

$$x^p(z^m + y^n) = z^k + y^l$$

setzen wir für  $k > m$  und  $l > n$

$$f_2 = y^{l-n} = \eta; \quad f_3 = z^{k-m} = \eta; \quad f_1 = x^p = \eta;$$

$$F_2 = y^{-n} = \xi; \quad F_3 = -z^{-m} = \xi;$$

$$\Phi_2 = \eta - \frac{1}{\xi \frac{l-n}{n}} = 0; \quad \Phi_3 = \eta + \frac{1}{\xi \frac{k-m}{m}} = 0; \quad \Phi_1 = \xi = 0.$$

Für  $m = n = p = 1$  und  $k = l = 2$ , d. h. für

$$x = \frac{z^2 + y^2}{z + y}$$

erhalten wir die Abb. 45.

Probe:  $z_1 = 2; \quad y_1 = 2,85;$   
 $x = 2,5;$

$z_2 = 0,5; \quad y_2 = -0,351;$

$$\frac{2,85^2 + 4}{2,85 + 2} = \frac{2,85^2 + 0,5^2}{2,85 + 0,5} = \frac{0,351^2 + 0,5^2}{-0,351 + 0,5} = \frac{0,351^2 + 4}{-0,351 + 2} = 2,5.$$

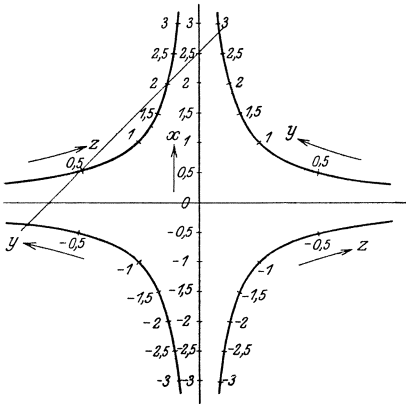


Abb. 45. 0,4 natürl. Größe.

Tafeln mit drei krummlinigen Skalen erhält man dann, wenn in der Gleichung (27) kein Glied gleich 0 ist. Diese Gleichung kann man auch in der Form

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_2 - F_3}{f_2 - f_3} &= \frac{F_3 - F_1}{f_3 - f_1} \\ &= \frac{F_1 - F_2}{f_1 - f_2} \end{aligned} \right\} (40)$$

schreiben. Die Funktionen, die diesem Typus entsprechen, sind meistens komplizierter Natur und kommen selten in der technischen Praxis vor,

öfters bei astronomischen und geodätischen Berechnungen.

Beispiele: 1. Die Funktion

$$\frac{\sin(x + y)}{r_3} + \frac{\sin(y + z)}{r_1} + \frac{\sin(z + x)}{r_2} = 0$$

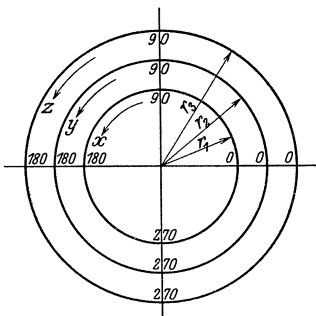


Abb. 46.

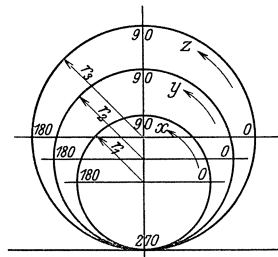


Abb. 47.

läßt sich mittels dreier konzentrischer Kreisskalen (Abb. 46) mit den Durchmessern  $r_1, r_2, r_3$  darstellen.

2. Die Funktion

$$\frac{\sin(x - y)}{r_3 \sin z} + \frac{\sin(y - z)}{r_1 \sin x} + \frac{\sin(z - x)}{r_2 \sin y} = 0$$

läßt sich mittels dreier sich berührender Kreisskalen (Abb. 47) darstellen.

Die Gleichungen zweiten Grades und höherer Grade bezüglich  $z$ , deren Koeffizienten Funktionen von  $x$  und  $y$  sind, lassen sich ebenfalls mittels der Gleichung (40) darstellen. So kann man z. B. die Gleichung  $z^2 xy(y - x) - z(x + y) + x^2 + y^2 = 0$

mittels einer Tafel, die aus zwei gleichseitigen Hyperbeln und der Parabel  $\eta^2 = \xi$  besteht (Abb. 48), berechnen.

Zwei krummlinige Skalen dieser nomographischen Tafeln können auch zusammenfallen, indem zwei Skalenträger ineinanderfallen oder auch die Skalen identisch sind (s. auch Abb. 70). Es sind im letzten Falle in den allgemeinen Gleichungen entsprechende Änderungen vorzunehmen.

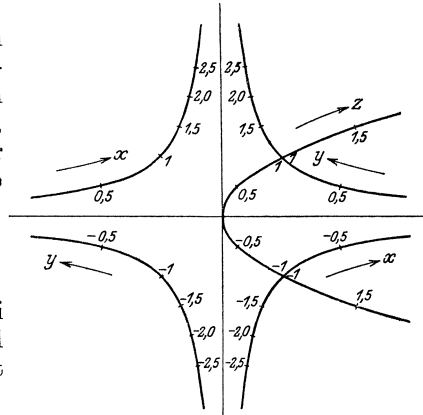


Abb. 48. 0,4 natürl. Größe.

### § 13. Zusammenstellung der Resultate.

In Tabelle I sind alle möglichen Fälle der nomographischen Tafeln von d'Ocagne mit geradlinigen und krummlinigen Skalen zusammengestellt, wobei gewisse Änderungen im Vergleiche zu den früheren Auffassungen einzelner Beziehungen gemacht sind, welche aus einem allgemeineren Standpunkt folgen, der sich uns hier aufdrängt. Die erhaltenen geometrischen Figuren beziehen wir auf ein (recht- oder schiefwinkliges) Koordinatensystem  $OEH$ , welches wir so wählen (Kolonne 3 und 4), daß es sich möglichst gut der gegebenen Figur anpaßt. In der Kolonne 2 finden wir die Schemata der Tabellen, wobei die krummlinigen Skalen mit einer Schlangenlinie bezeichnet sind.

Sämtliche Skalen, sowohl die geradlinigen als auch die krummlinigen, stellen wir mittels Parameter dar. Die Parametergleichungen der Achse  $OH$  sind

$$\xi = 0; \quad \eta = f(x),$$

Tabelle I

Lfd. Nr.	Schema der Tafel	Koordinatensystem		Gleichungen der Skalen						Normalform der Funktion $T(x, y, z) = 0$	
				$\Phi_1$		$\Phi_2$		$\Phi_3$			
		$O\xi$	$OH$	$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1		$\perp \Phi_1$	$\Phi_1$	0	$f_1(x)$	$k_2$	$f_2(y)$	$k_3$	$f_3(z)$	$k_3 f_2 + (k_2 - k_3) f_1 - k_2 f_3 = 0$	
2		$\Phi_2$	„	„	„	$F_2(y)$	0	„	„	$k_3 f_1 + F_2 (f_3 - f_1) = 0$	
3		„	„	„	„	„	„	$F_3(z)$	$m_3 F_3$	$(F_3 - F_2) f_1 + m_3 F_2 F_3 = 0$	
4		„	„	„	„	„	„	„	$m_3 F_3 + n_3$	$(F_3 - F_2) f_1 + (m_3 F_3 + n_3) F_2 = 0$	
5		$\perp \Phi_1$	„	„	„	„	$k_2$	$f_2(y)$	„	$f_3(z)$	$(f_2 - f_1) F_3 + k_2 f_1 - k_2 f_3 = 0$
6		$\Phi_2$	„	„	„	„	$F_2(y)$	0	„	„	$(F_3 - F_2) f_1 + F_2 f_3 = 0$
7		$\perp \Phi_1$	„	„	„	„	„	$f_2(y)$	„	„	$(F_3 - F_2) f_1 + F_2 f_3 - F_3 f_2 = 0$
8		beliebig	$F_1(x)$	„	„	„	„	„	„	„	$(F_3 - F_2) (f_3 - f_1) + (F_3 - F_1) (f_2 - f_3) = 0$

die der Achse  $O\xi$ :

$$\eta = 0; \quad \xi = F(x).$$

Die Parametergleichungen einer beliebigen geradlinigen Skala, die schräg das Koordinatensystem durchschneidet, schreiben wir meistens

$$\xi = F(u); \quad \eta = mF(u) + n \quad (41)$$

oder

$$\eta = f(u); \quad \xi = mf(u) + n, \quad (42)$$

und dementsprechend tragen wir die Teilpunkte der Skala auf.

Siehe Abb. 49 für  $\eta = mF(u) + n = mu^2 + n,$   
 $\xi = F(u) = u^2.$

Siehe Abb. 50 für  $\eta = f(u) = 2u,$   
 $\xi = mf(u) + n = 2mu + n.$



Tabelle I

Bezeichnung d. Typengl.	Typische Form der Funktion $T(x, y, z) = 0$	Gleichungen für Maßstäbe
12	13	14
A	$\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 = 0$	$\mu(f_1) \mu(k_2) = \mu(f_2) \mu(k_3); \frac{k_2 - k_3}{\mu(f_1)} + \frac{k_3}{\mu(f_2)} = \frac{k_2}{\mu(f_3)}$
B	$\Psi_1 (\Psi_2 + \Psi_3) + C \Psi_2 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_3); \mu(F_2) = \mu(k_3)$
C	$\Psi_1 (\Psi_2 + \Psi_3) + C \Psi_2 \Psi_3 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(F_2) = \mu(F_3)$
D	$\Psi_1 (\Psi_2 + \Psi_3) + C \Psi_2 \Psi_3 + C' \Psi_2 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(F_2) = \mu(F_3) = \mu(n_3)$
E	$\Psi_1 + \Psi_2 (\Psi_1 + \Psi_3) + \Theta_2 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2) = \mu(f_3); \mu(F_3) = \mu(k_2)$
F	$\Psi_1 (\Psi_2 + \Psi_3) + \Psi_2 \cdot \Theta_3 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_3); \mu(F_2) = \mu(F_3)$
G	$\Psi_1 (\Psi_2 + \Psi_3) + \Psi_2 \Theta_3 + \Psi_3 \Theta_2 = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2) = \mu(f_3); \mu(F_2) = \mu(F_3)$
H	$(\Psi_1 + \Psi_2) (\Psi_3 + \Theta_1) + (\Psi_1 + \Theta_3) (\Theta_2 + \Theta_1) = 0$	$\mu(f_1) = \mu(f_2) = \mu(f_3); \mu(F_1) = \mu(F_2) = \mu(F_3)$

Die auf Grund dieser Festsetzungen erhaltenen Parameterbeziehungen für die Koordinaten der beliebigen Punkte  $P_1, P_2,$

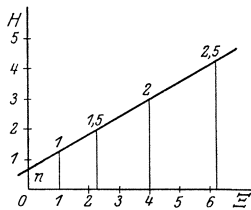


Abb. 49.

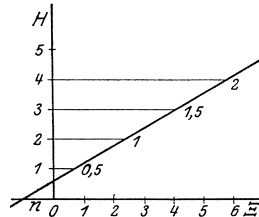


Abb. 50.

$P_3,$  die auf den Skalen  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  liegen (Kolonne 5 bis 10), setzen wir in die Gleichung (27) ein, die die Beziehung ausdrückt,

welche zwischen diesen Größen bestehen muß, damit die Punkte  $P_1, P_2, P_3$  auf einer Geraden liegen. Dadurch erhalten wir eine Gleichung für die drei Parameter  $x, y, z$ , die wir die Normalform der Gleichung nennen (Kolonne 11).

Wenn umgekehrt eine Beziehung zwischen  $x, y, z$  gegeben ist, die man nomographisch darstellen soll, so versuchen wir mittels entsprechender Umformungen derselben eine mit der Normalform identische Form zu geben. Alsdann verbleibt uns aus der Tabelle die entsprechenden Parametergleichungen der Skalen  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  abzulesen, wonach wir mit Leichtigkeit die Tabelle konstruieren können.

Durch Ordnen der Normalform, durch Einbeziehen der Konstanten unter die Funktionszeichen usw. erhalten wir eine Gleichung von allgemeiner Form oder die sog. Typengleichung, die sich mittels der betreffenden nomographischen Tafel darstellen läßt<sup>1)</sup> (Kolonne 13). Die Aufstellung dieser Gleichungen hat den Zweck, eine Erleichterung der Auffindung des entsprechenden Nomogramms für eine gegebene Beziehung  $T(x, y, z) = 0$  zu schaffen. Die Typengleichungen sind mit Buchstaben bezeichnet (Kolonne 12).

Mittels einer entsprechenden Umformung kann man oft eine Gleichung von vollständig anderer Form zu einer der Typengleichungen der Kolonne 13 zurückführen, und es ist Sache einer gewissen Übung, zu beurteilen, ob in einer gegebenen Gleichung sich eine solche Umformung durchführen läßt und welche Mittel dazu dienen. Die am häufigsten vorkommenden Umformungen sind: die lineare und die (rationale) gebrochen-lineare Umformung (projektive Umformung). Wir verweilen bei der letzteren als bei der allgemeineren.

Die Typengleichung können wir in der Form

$$A \Psi_1 + B = 0 \quad (43)$$

schreiben, wo  $A$  und  $B$  Funktionen der Funktionen  $\Psi_2$  und  $\Psi_3$  sind. Mittels projektiver Umformung, die durch die Gleichung

$$\Psi_1 = \frac{\alpha \Psi'_1 + \beta}{\gamma \Psi'_1 + \delta} \quad (44)$$

ausgedrückt ist, wobei

$$\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0, \quad (45)$$

erhalten wir eine neue Gleichung

$$A' \Psi'_1 + B' = 0, \quad (46)$$

---

<sup>1)</sup> Dabei bedeuten  $\Psi_1$  und  $\Theta_1$  beliebige Funktionen von  $x$ ,  $\Psi_2$  und  $\Theta_2$  — beliebige Funktionen von  $y$ ,  $\Psi_3$  und  $\Theta_3$  — beliebige Funktionen von  $z$ .

wo

$$A' = \alpha A + \gamma B; \quad B' = A\beta + B\delta. \quad (47)$$

Um eine neue Typenform der Gleichung zu finden, die sich durch die betreffende nomographische Tafel darstellen läßt, kann man mit Erfolg die obige Umformung dann anwenden, wenn  $A$  und  $B$  Ausdrücke derselben Ordnung sind. (Oder noch besser, wenn sie homogen sind.) So läßt sich z. B. die Typengleichung  $B$  (Tabelle I) mittels der Umformungen

$$\Psi_1 = -\frac{C}{\Psi_1' + 1} \quad \text{oder} \quad \Psi_1 = -\frac{C\Psi'}{\Psi_1' + 1}$$

auf die Form

$$\Psi_1\Psi_2 - \Psi_3 = 0$$

bzw.

$$\Psi_1\Psi_3\Psi_2 = 0$$

zurückführen. Wir können auch z. B. mittels projektiver Umformung die Gleichungen  $D$  und  $E$  in der Form

$$\Psi_1\Psi_2\Psi_3 + C\Psi_1 + C'\Psi_3 + C'' = 0$$

bzw.

$$\Psi_2\Psi_3 + \Psi_1 + \Psi_3 + \Theta_2 = 0$$

darstellen.

Einen ganz anderen Charakter besitzt die Änderung des Koordinatensystems, die wir manchmal aus rein zeichnerischen Gründen vornehmen. In gewissen Fällen ist es nämlich bequem, wenn der Winkel zwischen den sich schneidenden Skalen klein ist, und dann ist das Auftragen dieser Skalen mittels eines schiefwinkligen Koordinatensystems unbequem. Wir führen dann — nur vorübergehend und ohne etwas in den anderen Gleichungen zu ändern — eine Änderung des schiefwinkligen Koordinatensystems in ein rechtwinkliges durch, mit Belassung einer Achse (Abb. 51), mittels der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \eta' &= \eta \sin \alpha & \eta &= \eta' \operatorname{cosec} \alpha \\ \xi' &= \xi + \eta \cos \alpha & \xi &= \xi' - \eta' \cotg \alpha \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Die Formeln für die Maßstäbe  $\mu$ , die wir in der Kolonne 14 finden, unterscheiden sich von den Formeln, die in den §§ 6, 7 und 8 abgeleitet werden, dadurch, daß sie sich nicht auf Typengleichungen, sondern auf Normalformen beziehen. Die Gleichungen für die Maßstäbe erhalten wir mittels folgenden Verfahrens, das sich auf alle Fälle anwenden läßt. Wir werden dieses Verfahren an dem Beispiele des Falles Nr. 1 entwickeln. Aus der

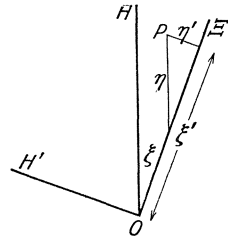


Abb. 51.

Normalform der Gleichung können wir eine der drei Funktionen  $f_1, f_2, f_3$ , z. B.  $f_3$  berechnen. Wir erhalten

$$f_3 = \frac{k_3 f_2 + (k_2 - k_3) f_1}{k_2}.$$

Dabei bemerken wir, daß diese Gleichung den Charakter einer Beziehung zwischen Zahlen besitzt, daß also die Größen  $f_3, f_2, f_1, k_2, k_3$  darin Zahlen sind. Wenn wir zur nomographischen Darstellung dieser Gleichung übergehen, legen wir jedem der obigen Werte den Charakter einer Strecke bei in der Weise, daß, wenn der Wert der Funktionen  $f_1, f_2, f_3$  für gewisse Werte der Parameter  $x, y, z$  (zahlenmäßig) gleich der Einheit ist, wir diese Zahleneinheit mittels einer Strecke von der Länge  $\mu(f_1), \mu(f_2), \mu(f_3)$  mm darstellen und daß wir außerdem die Zahlen  $k_2, k_3$  usw. graphisch in Einheiten, die den Strecken  $\mu(k_2), \mu(k_3)$  mm usw. gleichen, darstellen.

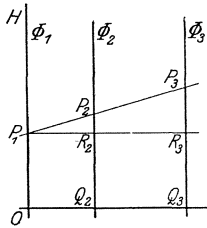


Abb. 52.

Gehen wir jetzt zur Tafel über, die den Fall Nr. 1 darstellt, und schneiden wir die Skalen  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  (Abb. 52) mit einer beliebigen Geraden  $P_1 P_2 P_3$ . Es entspreche dem Punkte  $P_1$  auf der Skala  $\Phi_1$  die Zahl  $p_1$ , dem Punkte  $P_2$  die Zahl  $p_2$ , dem Punkte  $P_3$  die Zahl  $p_3$ , es sei also

$$f_1(x_1) = p_1, \quad f_2(y_1) = p_2, \quad f_3(z_1) = p_3.$$

Wenn wir diese Werte in die Gleichung für  $f_3$  einsetzen, erhalten wir

$$p_3 = \frac{k_3 p_2 + (k_2 - k_3) p_1}{k_2}.$$

Auf Grund der angenommenen Bezeichnungen ist

$$\begin{aligned} OP_1 &= p_1 \mu(f_1); & OP_2 &= p_2 \mu(f_2); & OP_3 &= p_3 \mu(f_3); \\ OQ_2 &= k_2 \mu(k_2); & OQ_3 &= k_3 \mu(k_3). \end{aligned}$$

Führen wir eine Gerade  $P_1 R_2 R_3 \parallel OQ_2 Q_3$ ; wir erhalten dann:

$$\frac{p_3 \mu(f_3) - p_1 \mu(f_1)}{k_3 \mu(k_3)} = \frac{p_2 \mu(f_2) - p_1 \mu(f_1)}{k_2 \mu(k_2)}.$$

Wenn wir den erhaltenen Zahlenwert für  $p_3$  in die Gleichung einsetzen, finden wir

$$\frac{\frac{k_3 p_2 + (k_2 - k_3) p_1}{k_2} \mu(f_3) - p_1 \mu(f_1)}{k_3 \mu(k_3)} = p_2 \mu(f_2) - p_1 \mu(f_1)$$

oder

$$k_3 p_2 \mu(f_3) \mu(k_2) + k_2 p_1 \mu(f_3) \mu(k_2) - k_3 p_1 \mu(f_3) \mu(k_2) - k_2 p_1 \mu(f_1) \mu(k_2) = k_3 p_2 \mu(f_2) \mu(k_3) - k_3 p_1 \mu(f_1) \mu(k_3).$$

Diese Gleichung muß wahr sein, unabhängig davon, wie die Gerade  $P_1 P_2$  gezogen ist. Sie muß also unabhängig von  $p_1$  und  $p_2$  sein. Wenn wir die Koeffizienten bei  $p_1$  und  $p_2$  Null gleichsetzen, so erhalten wir die Beziehungen

$$\mu(f_3) \mu(k_2) = \mu(f_2) \mu(k_3), \tag{a}$$

$$k_2 \mu(f_3) \mu(k_2) - k_3 \mu(f_3) \mu(k_2) - k_3 \mu(f_1) \mu(k_2) + k_3 \mu(f_1) \mu(k_3) = 0,$$

wobei diese letztere Gleichung sich in

$$\frac{k_2 - k_3}{\mu(f_1)} + \frac{k_3}{\mu(f_2)} = \frac{k_2}{\mu(f_3)} \tag{b}$$

umformen läßt. In jedem einzelnen Falle verfahren wir in folgender Weise: Nachdem  $\mu(f_1)$  und  $\mu(f_2)$  gewählt sind, finden wir aus der Gleichung (b)  $\mu(f_3)$ ; dann wählen wir  $k_2 \mu(k_2)$  [oder  $k_3 \mu(k_3)$ ] beliebig, finden  $\mu(k_2)$  [ $\mu(k_3)$ ], berechnen aus der Gleichung (a)  $\mu(k_3)$  [ $\mu(k_2)$ ], wonach wir an die Konstruktion der Tafel schreiten können.

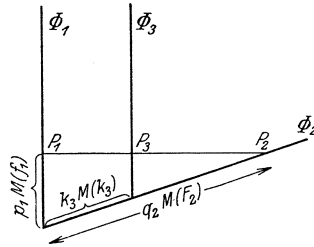


Abb. 53.

Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß es sich bei allen Tafeln anwenden läßt. So ist z. B. im Falle Nr. 2 (Abb. 53)

$$\frac{p_1 \mu(f_1)}{q_2 \mu(f_2)} = \frac{p_3 \mu(f_3)}{q_2 \mu(f_2) - k_3 \mu(k_3)} = \frac{\left(p_1 - \frac{k_3 p_1}{q_2}\right) \mu(f_3)}{q_2 \mu(f_2) - k_3 \mu(k_3)} \tag{a}$$

oder

$$p_1 q_2 \mu(f_1) \mu(f_2) - k_3 p_1 \mu(f_1) \mu(k_3) = p_1 q_2 \mu(f_2) \mu(f_3) - k_3 p_1 \mu(f_2) \mu(k_3);$$

diese Gleichung wird zur Identität, wenn wir

$$\begin{aligned} \mu(f_1) \mu(f_2) &= \mu(f_2) \mu(f_3), \\ \mu(f_1) \mu(k_3) &= \mu(f_2) \mu(k_3) \end{aligned}$$

setzen, woraus erfolgt:

$$\mu(f_2) = \mu(k_3); \quad \mu(f_1) = \mu(f_3).$$

Bei der Umformung der Normalform (oder Typenform) der

Gleichung ändern sich auch die Gleichungen für die Maßstäbe. So erhalten wir z. B., wenn wir in die Gleichung (a)

$$q_2 = \frac{h k_3}{q_2' + h}; \quad p_3 = -q_2' p_1$$

einsetzen, die Beziehung

$$\frac{p_1 \mu(f_1) [q_2' \mu'(f_2) + h \mu(h)]}{h \mu(h) k_3 \mu(k_3)} = \frac{-q_2' p_1 \mu(f_3)}{\frac{h \mu(h) k_3 \mu(k_3)}{q_2' \mu'(f_2) + h \mu(h)} - k_3 \mu(k_3)},$$

woraus unmittelbar die Gleichung (15) folgt.

Wenn wir den Maßstab  $\mu$  mittels Parametergleichungen definieren, kommen wir zum Begriff des Maßstabes einer krummlinigen Skala. Darunter verstehen wir die Gesamtheit der beiden Maßstäbe  $\mu(f)$  und  $\mu(F)$  der Parametergleichungen:

$$\xi = F(x), \quad y = f(x),$$

die die Kurve  $\Phi(\xi, \eta) = 0$  darstellen. Mit der Änderung der Parametergleichungen ändern sich die Teilpunkte der Skala (es ändert sich offenbar nicht die Form der Kurve  $\Phi = 0$  selbst). So z. B. je nachdem, ob wir die Gleichung

$$\eta = \frac{1}{5} \xi^2$$

mit

$$\eta = \frac{1}{5} x^2, \quad \xi = x \quad \text{I}$$

oder mit

$$\eta = 5 x^2, \quad \xi = 5 x \quad \text{II}$$

oder mit

$$\eta = \frac{1}{5} x, \quad \xi = \sqrt{x} \quad \text{III}$$

darstellen, erhalten wir, wenn wir in allen drei Fällen  $\mu(\eta) = 10 \text{ mm}$ ,  $\mu(\xi) = 10 \text{ mm}$  setzen, auf derselben Parabel (Abb. 54) drei verschiedene Skalen, und zwar

für den Fall I — die innere Skala,

„ „ „ II — die äußere Skala,

„ „ „ III — die Skala in Klammern.

Wenn wir jedoch einen von den Maßstäben  $\mu(\xi)$  oder  $\mu(\eta)$  ändern, so ändert sich die Kurve [s. Abb. 55, die für dieselbe Gleichung wie Abb. 54, aber für  $\mu(\xi) = 5$ ,  $\mu(\eta) = 10$  gezeichnet ist].

Durch Anwendung des Begriffes der Maßstäbe einer krummlinigen Skala erleichtern wir uns die Konstruktion der krummlinigen Skalen. In der Kolonne 14 der Tabelle I finden wir auch

die Gleichungen für die Maßstäbe der Tafeln, die krummlinige Skalen enthalten. Zu diesen Gleichungen kommen wir durch ein Verfahren, das vollständig dem oben beschriebenen ähnlich ist. So ist z. B. für den Fall Nr. 6

$$f_3 = \frac{f_1 (F_2 - F_3)}{F_2}$$

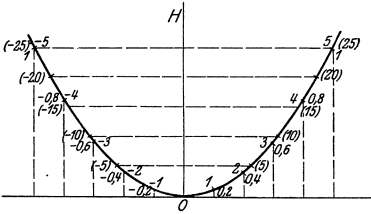


Abb. 54. 0,4 natürl. Größe.

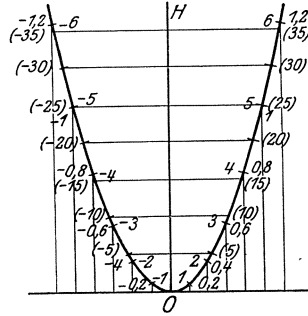


Abb. 55. 0,5 natürl. Größe.

oder, wenn wir die Bezeichnungen der Abb. 56 einsetzen,

$$p_3 = \frac{p_1 (q_2 - q_3)}{q_2}$$

Andererseits lesen wir aus derselben Abbildung die geometrische Beziehung

$$\frac{p_1 \mu (f_1)}{q_2 \mu (F_2)} = \frac{p_3 \mu (f_3)}{q_2 \mu (F_2) - q_3 \mu (F_3)}$$

ab. Wenn wir in diese Gleichung den für  $p_3$  erhaltenen Wert einsetzen, erhalten wir die Gleichung

$$q_2 \mu (f_1) \mu (F_2) - q_3 \mu (f_1) \mu (F_3) = q_2 \mu (F_2) \mu (f_3) - q_3 \mu (F_2) \mu (f_3),$$

die zur Identität wird mit der Annahme

$$\begin{aligned} \mu (f_1) &= \mu (f_3), \\ \mu (F_2) &= \mu (F_3). \end{aligned}$$

Wenn wir das beschriebene Verfahren zur Auffindung der Beziehungen zwischen den Maßstäben der Skalen auf die Zentralprojektion der krummlinigen Skalen nach den Formeln (29) und (34) anwenden, so finden wir mit Leichtigkeit für die Gleichung (29) die Formel (30) und für die Gleichung (34) die Beziehung

$$\frac{\mu (f_3)}{\mu (F_3)} = \frac{\mu (f_2)}{\mu (F_2)}. \tag{49}$$

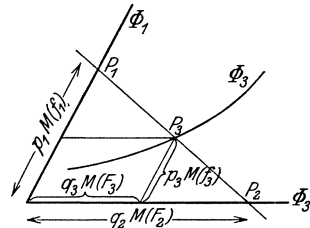


Abb. 56.

### § 14. Die zusammengesetzten Tafeln.

Es versteht sich von selbst, daß, falls in einer nomographisch darstellbaren Abhängigkeit zwischen drei Variablen  $x, y, z$

$$\chi(x, y, z) = 0 \quad (50)$$

diese Variablen solche Funktionen  $r, s, t, u, v, w$  sind, daß

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(r, s, x) &= 0 \\ \psi_2(t, u, y) &= 0 \\ \psi_3(v, w, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

ist und daß diese drei Gleichungen sich nomographisch darstellen lassen, wir nach dem Einsetzen dieser Ausdrücke in die Gleichung (50) die Funktion

$$P(r, s, t, u, v, w) = 0 \quad (52)$$

erhalten, die wir ebenfalls nomographisch darstellen können; wir bewerkstelligen dies in der Weise, daß bei gegebenen  $r, s, t, u, v$  und gesuchtem  $w$  wir aus dem Nomogramm für  $\psi_1$  für die gegebenen  $r$  und  $s$  die Variable  $x$ , aus dem Nomogramm für  $\psi_2$  und den gegebenen  $t$  und  $u$  die Variable  $y$  finden, dann mittels der in dieser Weise gefundenen  $x$  und  $y$  aus dem Nomogramm für  $\chi$  die Variable  $z$ , schließlich aus dem Nomogramm für  $\psi_3$  für das gefundene  $z$  und das gegebene  $v$  das gesuchte  $w$  finden. Diese Berechnungsart besitzt den Nachteil, daß wir die im Laufe der Berechnung erhaltenen  $x, y$  und  $z$  zwecks ihrer weiteren Verwendung aufschreiben müssen und das Verfahren wird dabei unstetig. Dieser Nachteil wird in gewissem Maße behoben, wenn die Variablen  $x, y, z$  sich sowohl in Gleichung (50) als auch in Gleichung (51) in Form derselben Ausdrücke  $f_1(x), f_2(y)$  und  $f_3(z)$  befinden. Dann sind die Funktionsskalen für  $x, y, z$  Gerade und bei der Berechnung erhalten wir die gebrochene Linie  $ABCDEF$  (Abb. 57), in welcher mit Kreisen beliebig wählbare, mit Kreuzen gefundene Größen bezeichnet sind. (Auf Abb. 57 sind die drei Skalen für  $x, y$  und  $z$  als parallel angenommen.) Die Variablen  $x, y, z$  entsprechen den Gleichungen (50) und (51), sie sind also gewissermaßen Hilfsgrößen und keine von ihnen kann das Endresultat der Berechnung sein [also die abhängige Variable der Funktion  $P$ , Formel (56)]. Die Skalen  $x, y$  und  $z$  nennen wir Zapfenlinien; auf den Zapfenlinien ist das Auftragen der Skala überflüssig.

Das Verfahren bei der Berechnung gewinnt die Stetigkeit wieder, wenn eine von den Variablen  $x$  und  $y$  (die besondere



Stellung der Variablen  $z$  beruht darauf, daß  $z$  in diesem Falle das einzige Glied ist, das die abhängige Variable  $w$  mit anderen Variablen verbindet), z. B.  $x$ , die unabhängige Variable ist. Dann erhalten wir einen einzigen gebrochenen Linienzug  $GKLM$  (Abb. 57). Nachdem wir die Linie  $GK$  durch das Anlegen eines Lineals gefunden haben, setzen wir am besten den Punkt  $K$  auf der Skala  $y$  fest, indem wir in ihn eine Nadel hineinstecken. Dann drehen wir um diese Nadel das Lineal, um die Gerade  $KL$  zu erhalten. In den Punkt  $L$  stecken wir wieder eine Nadel und indem wir das Lineal um diesen Punkt drehen, erhalten wir auf der Skala  $w$  den gesuchten Punkt  $M$ .

Beispiel 1.

$$w = \frac{vx}{y}$$

Durch Logarithmieren erhalten wir

$$\lg w = \lg v + \lg x - \lg y.$$

Wir setzen

$$z = \lg x - \lg y;$$

dann entspricht diese Gleichung und die Gleichung

$$\lg w = \lg v + z$$

den allgemeinen Gleichungen (50) und (51).

Die Tafel müßte fünf Skalen für die Variablen  $x, y, z, v, w$  enthalten. Man kann jedoch durch entsprechende Wahl der Entfernungen der Skalen und der Maßstäbe erreichen, daß z. B. die Skalen für  $v$  und für  $y$  und die Skalen für  $x$  und  $w$  identisch sind, wodurch die Anzahl der Skalen sich auf drei vermindert (Abb. 58).

Die Ablesung erfolgt in nachstehender Reihenfolge: Nachdem  $x$  und  $y$  auf den entsprechenden Skalen gewählt sind, suchen wir  $z$  auf und stellen den Wert mittels der Nadel fest; wir drehen das Lineal um die Nadel herum, so daß es den gewählten Wert von  $v$  auf der Skala  $v$  schneidet. Der Schnittpunkt mit der Skala  $w$  bestimmt den Wert von  $w$ .

Probe: 
$$\frac{2 \cdot 30}{8} = 7,5.$$

Beispiel 2. Mittels der Methode der Zapfenlinie kann man manchmal in einfacherer Weise

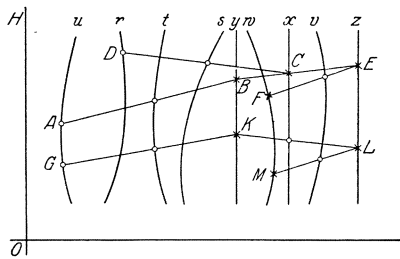


Abb. 57.

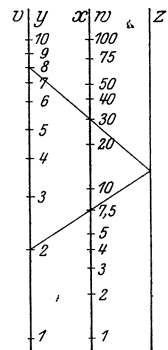


Abb. 58.  
0,4 natürl.  
Größe.

Funktionen von drei Variabeln darstellen; so kann man z. B. die Funktion

$$z = \frac{x u^2}{(a - u)^2}$$

mittels der früher entwickelten Methoden darstellen, dann müßte man aber die projektive Skala  $\frac{u}{a-u}$  auftragen, was man vermeiden kann. Wenn wir eine neue Variable  $y$  einführen und setzen

$$\lg [z(a - u)^2] = y = \lg [x u^2],$$

so erhalten wir eine nomographische Tafel mit einer Zapfenlinie  $y$  (Abb. 59).

Nachdem  $x$  (100) und  $u$  (50) gewählt sind, finden wir auf der Zapfenlinie den Punkt  $z$ , um den wir das Lineal so drehen, daß es auf der Skala  $u$  durch den Punkt „ $v$ “ = „ $a - u$ “ ( $v = 250 - 50 = 200$ ) zu liegen kommt; auf der Skala  $z$  erhalten wir den Wert von  $z$  (6,25).

Dieselbe Tafel dient zur Berechnung der Funktion

$$z = x \frac{u^2}{v^2}.$$

Probe:

$$25 = 100 \left( \frac{50}{100} \right)^2.$$

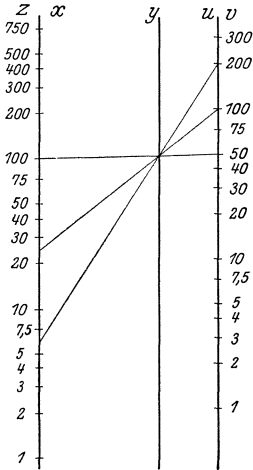


Abb. 59.  
0,4 natürl. Größe.

### § 15. Die Tafeln für vier Variable mit dem Schnittsystem zweiten Grades.

Man kann Tafeln, die eine sehr ausgedehnte Anwendbarkeit besitzen, erhalten, wenn man als Schnittsystem einen Spezialfall der Kurven zweiter Ordnung benutzt. Wie wir schon in § 9 bemerkt haben, eignen sich zu diesem Zwecke weder die allgemeinen Kurven zweiter Ordnung, noch der Kreis. Ein weiterer Spezialfall der Gleichung zweiter Ordnung ist der, in welchem dieselbe in ein Produkt zweier linearer Gleichungen zerfällt. Die Kurve, welche dieselbe dann darstellt, artet in ein Geradenpaar aus, die sich entweder schneiden oder parallel sind. Ein solches Paar ist eindeutig durch drei beliebig gegebene Punkte bestimmt. Im Falle zweier sich schneidender Geraden drehen wir dieselben so, daß eine von ihnen durch zwei von den drei gegebenen Punkten

hindurchgeht; dann verschieben wir das Lineal längs dieser Geraden, bis die zweite Gerade durch den dritten Punkt hindurchgeht, wodurch die Lage des Linienpaares bestimmt ist. Im Falle von zwei parallelen Geraden führen wir die eine durch zwei Punkte und ziehen dann vom dritten Punkt eine Gerade, die parallel zur ersteren ist.

Aus obigem ersehen wir, daß Linienpaare sich ebenso wie jede andere Kurve zweiter Ordnung dazu eignen, ein Schnittsystem in nomographischen Tafeln darzustellen. Wenn die drei Punkte auf drei Skalen  $x, y, z$  liegen, so wird das Schnittsystem auf der vierten Skala einen Punkt bestimmen, der einer vierten Variablen, der abhängigen Variablen  $u$  entspricht. Wir können somit auf diese Weise nomographische Tafeln für vier Variable aufbauen.

### A. Das Schnittsystem besteht aus zwei parallelen Geraden.

Denken wir uns ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $\mathcal{E}OH$  und in ihm vier Punkte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  mit den Koordinaten  $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \xi_3, \eta_3; \xi_4, \eta_4$ . Die Parallelitätsbedingung der Geraden  $P_1P_2$  und  $P_3P_4$  ist

$$\frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\eta_4 - \eta_3}{\xi_4 - \xi_3}, \quad (53)$$

d. h. wenn die Punkte  $P_1, P_2$  auf der ersten Geraden des Schnittsystems liegen, die Punkte  $P_3, P_4$  auf der zweiten Geraden, so müssen ihre Koordinaten der Gleichung (53) entsprechen. Es liege der Punkt  $P_1$  auf der krummlinigen Skala  $\Phi_1$ , der Punkt  $P_2$  auf der krummlinigen Skala  $\Phi_2$  usw. Nehmen wir weiter an, daß die Gleichungen der Kurven  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$  in Parametern  $x, y, z, u$  dargestellt seien:

$$\Phi_1 \begin{cases} \xi = F_1(x) \\ \eta = f_1(x) \end{cases}; \quad \Phi_2 \begin{cases} \xi = F_2(y) \\ \eta = f_2(y) \end{cases}; \quad \Phi_3 \begin{cases} \xi = F_3(z) \\ \eta = f_3(z) \end{cases}; \quad \Phi_4 \begin{cases} \xi = F_4(u) \\ \eta = f_4(u) \end{cases}. \quad (54)$$

Wenn wir diese Ausdrücke in die Gleichung (53) einsetzen, so erhalten wir

$$\frac{f_2 - f_1}{F_2 - F_1} = \frac{f_4 - f_3}{F_4 - F_3} \quad (53a)$$

oder

$$(f_2 - f_1)(F_4 - F_3) - (F_2 - F_1)(f_4 - f_3) = 0. \quad (53b)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Funktion der Variablen  $x, y, z, u$ . Wir können sie daher in der Form

$$T(x, y, z, u) = 0 \quad (55)$$

schreiben.

Aus dem obigen schließen wir folgendes: Wenn eine Funktion von vier Variablen sich so umformen läßt, daß sie die Form der Gleichung (55) annimmt, so kann man dieselbe mittels einer nomographischen Tafel mit einem Schnittsystem, das aus zwei parallelen Geraden besteht, darstellen, wobei die Skalen  $\Phi_1$  bis  $\Phi_4$  durch die Gleichungen (54) bestimmt sind.

Um eine von den vier Variablen (z. B.  $u$ ) zu berechnen, benutzen wir zwei Dreiecke aus Holz oder am besten aus einer durchsichtigen Masse, so daß man mittels Verschiebung eines Dreiecks aus einem Punkte auf der Skala  $z$  eine Parallele zu einer Geraden, die durch zwei gegebene Punkte auf den Skalen  $x$  und  $y$  hindurchgeht, ziehen kann.

Wenn wir annehmen, daß die Skalen  $\Phi_1$  bis  $\Phi_4$  Geraden oder Kurven sind, die in verschiedenen relativen Lagen sich befinden, so erhalten wir eine Reihe verschiedener nomographischer Tafeln, wobei jede einer gewissen Typengleichung (55) entspricht.

Die Tabelle II umfaßt alle möglichen Fälle. In Kolonne 2 sind die Schemata der Tafeln dargestellt. Aus den 34 Schemata sind grundsätzlich verschieden voneinander die Fälle Nr. 1, 4, 6, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 24, 27, 28, 31, 33 und 34. Diese Fälle sind (Kolonne 3) mit römischen Zahlen bezeichnet, die also dem Typus der Tafel entsprechen. Wir haben acht Tafeltypen mit geradlinigen Skalen und acht Typen mit krummlinigen. Alle übrigen Schemata sind Spezialfälle der oben genannten, die entweder durch Zusammenfallen von einem oder zwei Skalenpaaren (Nr. 2, 3, 5, 8, 9, 10, 12, 14, 20, 23, 26, 30) oder durch Vertauschung einer Skala mit einer anderen (Nr. 7, 13, 22, 29, 32) oder durch verschiedene Annahmen des Koordinatensystems (Nr. 25) entstanden sind. In der Tafel ist angenommen, daß wir mit der einen Geraden des Schnittsystems die Skalen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ , mit der anderen die Skalen  $\Phi_3$  und  $\Phi_4$  schneiden. Aus diesem Grunde können die Skalen  $\Phi_1$  und  $\Phi_3$ ,  $\Phi_2$  und  $\Phi_3$ ,  $\Phi_1$  und  $\Phi_4$  oder  $\Phi_2$  und  $\Phi_4$  zusammenfallen, nie jedoch  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  oder  $\Phi_3$  und  $\Phi_4$ . Aus demselben Grunde kann dasselbe Schema verschiedene Resultate geben durch Vertauschung der Skala  $\Phi_1$  oder  $\Phi_2$  mit  $\Phi_3$  oder  $\Phi_4$  nur dann, wenn durch solche Vertauschung die relative Lage der beiden Paare der geschnittenen Skalen geändert wird.

Die Koordinatenachsen wählen wir in der Weise (Kolonne 4 und 5), daß sie sich möglichst an die gegebene Abbildung anpassen, wonach wir die Parametergleichungen der Skalen  $\Phi_1$  bis  $\Phi_4$  (Kolonne 6 bis 13) aufstellen können. Die Kolonne 14 zeigt, in welcher Weise der gegebene Fall aus dem Tafeltypus

entsteht, dem er angehört. So erhalten wir z. B. den Fall Nr. 9 aus dem Schema Nr. 7 durch Zusammenfallen der Skala  $\Phi_2$  mit der Skala  $\Phi_3$ , den Fall Nr. 10 aus derselben Tafel Nr. 7 durch Zusammenfallen der Skala  $\Phi_2$  mit der Skala  $\Phi_3$  und der Skala  $\Phi_1$  mit der Skala  $\Phi_4$ . Weiteres Zusammenfallen der Skalen führt zu den Fällen, die schon berücksichtigt wurden. So erhalten wir z. B. durch die Annahme  $\Phi_2 = \Phi_3$  in Schema Nr. 13 wiederum den Fall Nr. 9. Durch die Annahme im Schema Nr. 16:  $\Phi_1 = \Phi_4$  erhalten wir den Fall Nr. 14. Es können auch hier (ähnlich wie im § 12) zwei krummlinige Skalenträger  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  oder  $\Phi_3$  und  $\Phi_4$  zusammenfallen oder identisch werden. Es sind dann in den allgemeinen Gleichungen entsprechende Änderungen vorzunehmen.

Wenn wir die Parameterausdrücke für die Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  der Skalen  $\Phi_1$  bis  $\Phi_4$  in der Gleichung (53a) einsetzen, so erhalten wir (Kolonne 15) die Normalform (s. S. 54) der Funktion  $T = 0$ , die wir mittels der gegebenen nomographischen Tafel darstellen können. Durch Ordnen der

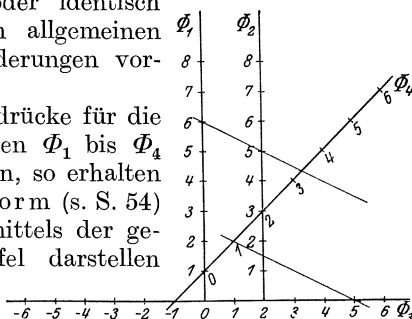


Abb. 60. 0,4 natürl. Größe.

Normalform dieser Funktion, Einbeziehen der Konstanten in die Funktionszeichen usw. erhalten wir den allgemeinen Typus (Typengleichung) der Funktion (Kolonne 17), die sich durch die gegebene Tafel berechnen läßt<sup>1)</sup>. Die Typengleichungen bezeichnen wir durch die Buchstaben  $A, B, C$  usw. (Kolonne 16).

Die Normalgleichungen der Fälle Nr. 15, 17, 18, 27 lassen sich durch entsprechende lineare Transformationen (s. Kolonne 18, Bemerkung) auf die schon früher erhaltenen Gleichungen zurückführen; als solche führen sie zu keiner neuen Typengleichung. Abb. 60 und 61 versinnbildlichen uns graphisch diese Umformungen. Abb. 60 stellt eine Tafel für die Funktion

$$(y - x)(u - z) = 2(u + 1) \tag{\alpha}$$

dar, die sich aus der Normalgleichung des Falles Nr. 15 durch Einsetzen

$$\begin{aligned} f_2 &= y; & f_1 &= x; & F_4 &= u; & F_3 &= z; \\ k_2 &= 2; & m &= 1; & n_4 &= 1 \end{aligned}$$

ergibt.

<sup>1)</sup> Dabei bedeuten  $\Psi_1$  und  $\Theta_1$  beliebige Funktionen von  $x$ ,  $\Psi_2$  und  $\Theta_2$  beliebige Funktionen von  $y$  usw.

Probe:  $x = 6, \quad y = 5, \quad u = 1, \quad z = 5;$

$$(5 - 6)(1 - 5) = 2(1 + 1).$$

Durch Einsetzen (s. Bemerkung auf der Tabelle II, Fall Nr. 15)

$$u = u' - 1, \quad z = z' - 1$$

erhalten wir

$$(y - x)(u' - z') = 2u',$$

d. h. eine Gleichung, die der Normalform des Falles Nr. 11 entspricht, falls

$$f_2 = y; \quad f_1 = x;$$

$$F_4 = u'; \quad F_3 = z';$$

$$k_2 = 2; \quad m = 1$$

ist. Abb. 61 stellt diese Tafel (gewöhnliche Skala) dar. Wenn wir wiederum

$$u' = u + 1,$$

$$z' = z + 1$$

setzen, so erhalten wir die Skala mit den in Klammern genommenen

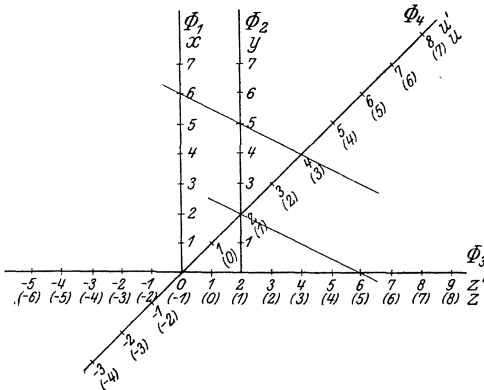


Abb. 61. 0,4 natürl. Größe.

Zahlen, die wiederum der Funktion ( $\alpha$ ) entspricht.

Probe:  $x = 6; \quad y = 5; \quad u = 1; \quad z = 5.$

Fall Nr. 25 ergibt sich aus dem Fall Nr. 24 durch Annahme eines anderen Koordinatensystems und sollte aus diesem Grunde eigentlich nicht in der Tabelle figurieren. Er ist in dieselbe einbezogen, weil die Annahme des Koordinatensystems wie im Falle Nr. 24 oder so wie im Falle Nr. 25 die gleiche Berechtigung hat.

Zusammenfassend sehen wir, daß wir zwölf Tafeltypen haben, die zu 18 Typen der Funktion  $T = 0$  führen. Über die Umformung der Typengleichung haben wir auf S. 54 gesprochen. Aus mehreren Tafeln, die zu derselben Typengleichung führen, benutzen wir selbstverständlich (falls nicht besondere Gründe bestehen, die etwas anderes erfordern) die einfachste Tafel, d. h. diejenige, die die kleinste Anzahl der Skalen enthält. Meistens finden also Anwendung die Fälle Nr. 3, 5, 6, 10, 11, 14, 16, 20, 21, 23, 24, 25, 28, 30, 31, 32, 33, 34, die in der Tafel umrändert sind. Die Gleichungen für die Maßstäbe erhalten wir mittels

eines Verfahrens, das im Grunde ganz ähnlich dem Verfahren ist, das auf S. 56 und den folgenden beschrieben ist. Wir zeigen das an dem Beispiel des Falles Nr. 7. Es ist

$$f_4 = \frac{(l_2 - f_1)(k_4 - F_3)}{F_2}. \quad (\alpha)$$

Wir wählen auf den Skalen  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  drei beliebige Punkte  $P_1, P_2, P_3$  und ziehen aus dem Punkte  $P_3$  eine Parallele zur Gleichung  $P_1P_2$ , die die Gerade  $\Phi_4$  im Punkte  $P_4$  schneidet (Abb. 62).

Es entspreche dem Punkte  $P_1$  auf Skala  $\Phi_1$  die Zahl  $p_1$ ,  
 „ „  $P_2$  „ „  $\Phi_2$  „ „  $q_2$ ,  
 „ „  $P_3$  „ „  $\Phi_3$  „ „  $q_3$ ,  
 „ „  $P_4$  „ „  $\Phi_4$  „ „  $p_4$ .

Außerdem bedeuten in Gleichung ( $\alpha$ )  $l_2$  und  $k_4$  ebenfalls Zahlen. Durch Einsetzen erhalten wir

$$p_4 = \frac{(l_2 - p_1)(k_4 - q_3)}{q_2}. \quad (\beta)$$

Aus Abb. 62 lesen wir die geometrische Abhängigkeit

$$\begin{aligned} & \frac{p_1 \mu(f_1) - l_2 \mu(l)}{q_2 \mu(F_2)} \\ &= \frac{p_4 \mu(f_4)}{q_3 \mu(F_3) - k_y \mu(k_y)} \end{aligned}$$

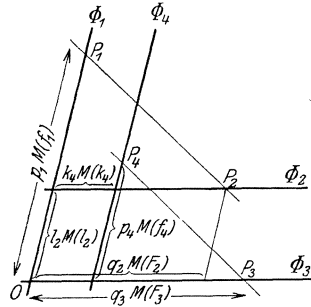


Abb. 62.

ab, aus welcher wir nach Gleichsetzung des Ausdruckes  $\beta$  für  $p_4$  die Gleichung erhalten:

$$\begin{aligned} & p_1 q_3 \mu(f_1) \mu(F_3) - l_2 q_3 \mu(l_2) \mu(F_3) - k_4 p_1 \mu(f_1) \mu(k_4) + l_2 k_4 \mu(l_2) \mu(k_4) \\ &= l_2 k_4 \mu(F_2) \mu(f_4) - p_1 k_4 \mu(F_2) \mu(f_4) - l_2 q_3 \mu(F_2) \mu(f_4) \\ &+ p_1 q_3 \mu(F_2) \mu(f_4), \end{aligned}$$

die zur Identität wird durch die Annahme

$$\mu(f_1) \mu(F_3) = \mu(F_2) \mu(f_4) = \mu(l_2) \mu(F_3) = \mu(f_1) \mu(k_4) = \mu(l_2) \mu(k_4);$$

diese letzten Gleichungen lassen sich auf die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mu(f_1) &= \mu(l_2), \\ \mu(F_3) &= \mu(k_4), \\ \mu(f_1) \mu(F_3) &= \mu(f_4) \mu(F_2) \end{aligned}$$

zurückführen.

In derselben Weise finden wir die Gleichungen für die Maßstäbe in den Tafeln mit den krummlinigen Skalen.

Wir sehen aus der Tabelle, daß die Gleichungen für die Maßstäbe in den Tafeln des besprochenen Typus sich auf Grund der beiden folgenden Regeln aufstellen lassen:

1. Falls in der Normalgleichung die Ausdrücke, die konstante Größen oder Funktionen einer Variablen sind, miteinander durch das Zeichen  $+$  oder  $-$  verbunden sind, so sind die Maßstäbe dieser Ausdrücke einander gleich. („Die Maßstäbe der Summanden sind einander gleich.“)

2. Falls in der Normalgleichung durch das Zeichen  $+$  oder  $-$  zwei Ausdrücke miteinander verbunden sind, deren jeder ein Produkt von algebraischen Summen von konstanten Größen, Funktionen einer Variablen oder einer konstanten Größe und einer Funktion einer Variablen darstellt, so sind „die Produkte der gleichen Maßstäbe der Summanden einander gleich“.

Bemerkung: Die Normalgleichung ist in geometrischer Beziehung immer homogen.

Das Verfahren beim Konstruieren der Tafel ist mutatis mutandis dasselbe wie bei den Tafeln mit drei Variablen.

Die besprochenen Tafeln für vier Variable besitzen im Vergleich mit den Tafeln für drei Variable den Nachteil, daß ihre Genauigkeit durch die Notwendigkeit der Anwendung einer Verschiebung des Zeichendreiecks während der Ablesung etwas kleiner ist. Auch verlangt hier die Ablesung mehr Sorgfalt, um so mehr, als sie nicht so bequem ist wie in den Tafeln für drei Variable. Bei gewisser Übung erzielt man jedoch vollkommen zufriedenstellende Resultate.

Es ist klar, daß man die besprochenen Tafeln miteinander oder mit den Tafeln für drei Variable zusammensetzen kann zur Berechnung von Abhängigkeiten zwischen mehr als vier Variablen. Das Schnittsystem besteht dann aus parallelen und sich schneidenden Geraden.

Um die zueinandergehörigen Skalen nicht zu vertauschen und den Gebrauch der Tafel übersichtlicher zu gestalten, führt man am besten die Skalenbezeichnungen in zwei Farben aus, so daß die entsprechenden Skalenteilungen gleichfarbig sind.

Beispiel 1. Wenn  $x$  und  $u$  die Ordinate und Abszisse eines auf einer Hyperbel mit den Achsen  $y$  und  $z$  liegenden Punktes sind, so besteht die Gleichung

$$\frac{x^2}{y^2} - \frac{u^2}{z^2} = 1.$$



Diese Gleichung können wir nomographisch darstellen, wenn wir sie mit der Normalgleichung des Falles Nr. 14, die in der Form

$$\frac{f_1}{F_2} - \frac{f_4}{F_3} = m_2$$

geschrieben ist, vergleichen; wir erhalten dann

$$f_1 = x^2, \quad F_2 = y^2, \quad F_3 = z^2, \\ f_4 = u^2, \quad m_2 = 1$$

und die nomographische Tafel Abb. 63, in der angenommen ist

$$\mu(f_1) = \mu(F_2) = \mu(F_3) = \mu(f_4) = 1 \text{ mm.}$$

Probe:  $x = 8, y = 6, z = 7;$   
aus der Tafel:  $u = 6,2;$

$$\frac{8^2}{6^2} - \frac{6,2^2}{7^2} - 1 = 0,06.$$

Beispiel 2. Die Gleichung

$$\sin(y - u) = x \cos u - z \cos y$$

formen wir in

$$(\sin y - x) \cos u = (\sin u - z) \cos y$$

um und, mit der

Normalgleichung des Falles Nr. 30 vergleichend, erhalten wir

$$f_1 = x, \quad f_3 = 2; \\ f_2 = \sin y = \eta; \quad F_2 = \cos y = \xi; \quad \Phi_2 = \xi^2 + \eta^2 - 1 = 0, \\ f_4 = \sin u = \eta; \quad F_4 = \cos u = \xi; \quad \Phi_4 = \xi^2 + \eta^2 - 1 = 0.$$

Abb. 64 stellt die Tafel für die Werte von  $x$  und  $z$ , die kleiner als 1 sind, dar, bei der Annahme

$$\mu(f_1) = \mu(F_2) = \mu(f_2) = \mu(f_3) = \mu(F_4) = \mu(f_4) = 50 \text{ mm.}$$

Probe:  $x = 0,8, y = 30^\circ, u = -45^\circ;$  aus der Tafel:  $z = -0,46.$   
 $\sin 75^\circ - 0,8 \cos 45^\circ - 0,46 \cos 30^\circ = 0,002.$

Beispiel 3. Zur Berechnung der Wurzeln der vollständigen Gleichung dritten Grades

$$x^3 + px^2 + qx + l = 0,$$

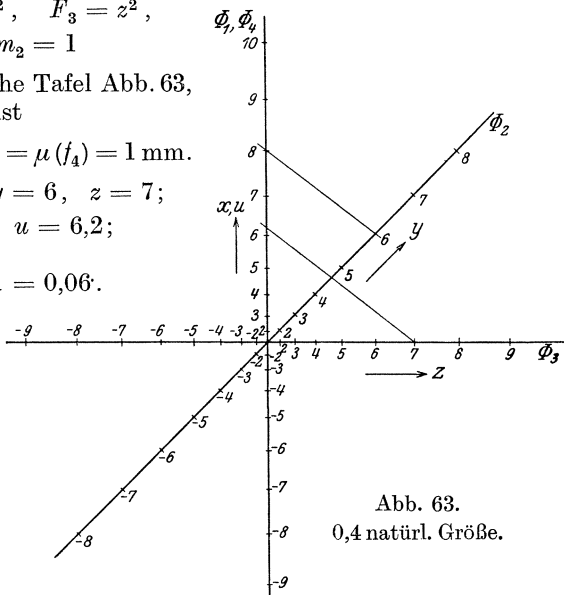


Abb. 63.  
0,4 natürl. Größe.

schreiben wir dieselbe in der Form

$$p^3 \left( \frac{x^2}{p^2} + \frac{q}{p^2} \right) + \frac{1}{\frac{x}{p} + 1} (l - pq) = 0,$$

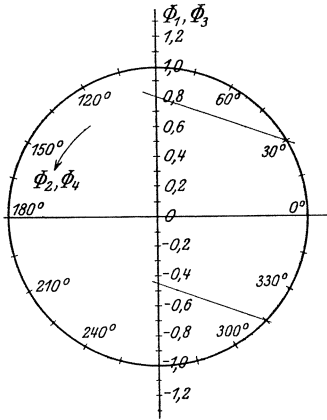


Abb. 64.  $\frac{1}{3}$  natürl. Größe.

in welcher sie sich mit der Normalform des Falles Nr. 23 vergleichen läßt. Wir erhalten

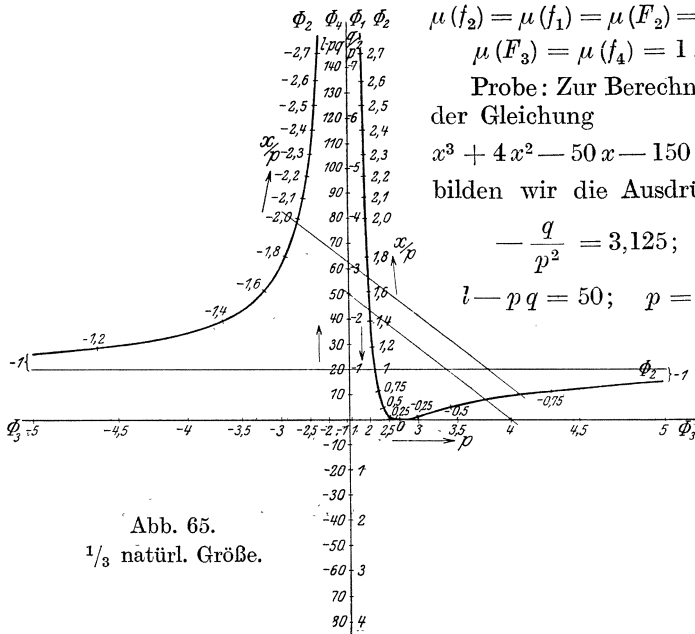
$$f_1 = -\frac{q}{p^2};$$

$$f_4 = l - pq; \quad F_3 = p^3;$$

$$f_2 = \eta = \frac{x^2}{p^2}; \quad F_2 = \xi = \frac{1}{\frac{x}{p} + 1};$$

$$\Phi_2 = \eta - \left( \frac{1 - \xi}{\xi} \right)^2 = 0.$$

Die Abb. 65 stellt die nomographische Tafel dar bei der Annahme



$$\mu(f_2) = \mu(f_1) = \mu(F_2) = 20;$$

$$\mu(F_3) = \mu(f_4) = 1.$$

Probe: Zur Berechnung der Gleichung

$$x^3 + 4x^2 - 50x - 150 = 0$$

bilden wir die Ausdrücke

$$-\frac{q}{p^2} = 3,125;$$

$$l - pq = 50; \quad p = 4$$

Abb. 65.  
 $\frac{1}{3}$  natürl. Größe.

und finden aus der Tafel die Wurzeln

$$\frac{x}{p} = 1,68; \quad \frac{x}{p} = -0,7; \quad \frac{x}{p} = -1,98.$$

Wenn wir sie in die Gleichung einsetzen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{für } x = 6,72: & \quad 303,46 + 180,64 - 336 - 150 = -1,9; \\ \text{„ } x = -2,8: & \quad -21,95 + 31,36 + 140 - 150 = -0,59; \\ \text{„ } x = -7,82: & \quad -496,79 + 250,88 + 396 - 150 = +0,09. \end{aligned}$$

In derselben Weise können wir auch die Gleichungen höheren Grades berechnen, in welchen drei Koeffizienten beliebig wählbar sind.

### B. Das Schnittsystem besteht aus zwei sich schneidenden Geraden.

Die zwei Geraden des Schnittsystems bilden miteinander einen von  $O$  verschiedenen Winkel, der für jeden speziellen Fall selbstverständlich konstant, sonst aber vollständig beliebig ist. Da das Konstruieren von zwei solchen sich unter einem konstanten Winkel schneidenden Geraden auf der Tafel unbequem wäre, so benutzen wir bei der Ablesung ein Blatt durchsichtigen Papiers, auf welchem das Schnittsystem gezeichnet ist. (Meistens ist der Winkel zwischen den Geraden ein rechter.) Dieses Blatt legen wir auf die Tafel und drehen es so, daß die zwei Geraden des Schnittsystems durch drei gegebene Punkte dreier Skalen hindurchgehen; im Schnittpunkte mit der vierten Skala lesen wir den Wert der vierten Variablen ab. Der größte Nachteil der Tafeln dieser Art ist ihre verhältnismäßig kleinere Genauigkeit, durch die Fehler verursacht, die bei der Einstellung des Blattes mit dem gezeichneten Schnittsystem begangen werden. Dagegen ist die Ablesung hier leichter als in den Tabellen der Art A.

Wir werden hier einen Spezialfall besprechen, in welchem die zwei Geraden des Schnittsystems senkrecht zueinander sind.

Denken wir uns ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $EOH$  und darin vier Punkte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  mit den Koordinaten  $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \xi_3, \eta_3; \xi_4, \eta_4$ . Die Bedingung dafür, daß die Geraden  $P_1P_2$  und  $P_3P_4$  zueinander senkrecht sind, ist

$$\frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi_3 - \xi_4}{\eta_4 - \eta_3}, \quad (56)$$

d. h. wenn die Punkte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  auf zwei Geraden des Schnittsystems liegen, so müssen ihre Koordinaten diese Gleichung erfüllen. Es befinde sich der Punkt  $P_1$  auf der krumm-

linigen Skala  $\Phi_1$ , der Punkt  $P_2$  auf der krummlinigen Skala  $\Phi_2$  usw. Nehmen wir an, daß die Gleichungen der Kurven  $\Phi_1$  bis  $\Phi_4$  in Parametern  $x, y, z, u$  ausgedrückt

$$\Phi_1 \begin{cases} \eta = f_1(x) \\ \xi = F_1(x) \end{cases}; \quad \Phi_2 \begin{cases} \eta = f_2(y) \\ \xi = F_2(y) \end{cases}; \quad \Phi_3 \begin{cases} \eta = f_3(z) \\ \xi = F_3(z) \end{cases}; \quad \Phi_4 \begin{cases} \eta = f_4(u) \\ \xi = F_4(u) \end{cases} \quad (57)$$

sind; wenn wir diese Ausdrücke in die Gleichung (56) einsetzen, so erhalten wir

$$\frac{f_2 - f_1}{F_2 - F_1} = \frac{F_3 - F_4}{f_4 - f_3} \quad (56a)$$

oder  $(f_2 - f_1)(f_4 - f_3) = (F_3 - F_4)(F_2 - F_1), \quad (56b)$

und dies ist die Gleichung der Funktion

$$T(x, y, z, u) = 0, \quad (58)$$

die sich durch die Tafel der besprochenen Art darstellen läßt. Wenn wir verschiedene Skalen wählen und ihre relative Lage ändern, so erhalten wir verschiedene typische Formen der Funktion  $T = 0$ , ebenso wie wir dies in § 15 A gefunden haben.

Wir werden zeigen, daß jede Tafel der besprochenen Art sich auf eine der Tafeln zurückführen läßt, die oben unter § 15 A beschrieben sind.

Nehmen wir an, daß wir die Skalen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  und die sie schneidende Gerade  $P_1P_2$  wie früher auf das Koordinatensystem  $\Xi O H$  beziehen, daß wir jedoch, die Skalen  $\Phi_3$  und  $\Phi_4$  und die sie schneidende Gerade  $P_3P_4$  auf ein neues Koordinatensystem  $O \Xi' H'$  beziehen, das man aus dem vorigen durch die Drehung des letzteren um den Punkt  $O$  um  $90^\circ$  erhält (Abb. 66).

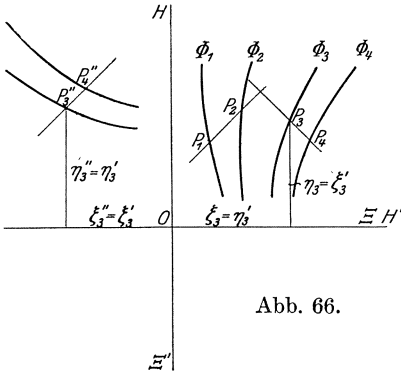


Abb. 66.

Zwischen den Koordinaten des alten und des neuen Koordinatensystems bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \eta_3 &= -\xi_3'; & \xi_3 &= \eta_3'; \\ \eta_4 &= -\xi_4'; & \xi_4 &= \eta_4'; \end{aligned}$$

wenn wir sie in die Gleichung (56) einsetzen, erhalten wir

$$\frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\eta_4' - \eta_3'}{\xi_4' - \xi_3'}, \quad (\alpha)$$

oder eine Gleichung, die identisch ist mit der Gleichung (53), die für ein aus zwei parallelen Geraden bestehendes Schnittsystem aufgestellt ist. Drehen wir jetzt das Koordinatensystem  $O\mathcal{E}'H'$  um den Punkt  $O$  zusammen mit den auf dasselbe bezogenen Skalen  $\Phi_3$  und  $\Phi_4$  wiederum um  $90^\circ$ , so daß es die frühere Lage  $O\mathcal{E}H$  einnimmt. Die Skalen  $\Phi_3$ ,  $\Phi_4$  besitzen dann die Lage  $\Phi_3''$  bzw.  $\Phi_4''$ , die Gerade  $P_3P_4$  die Lage  $P_3''P_4''$ . Die Koordinaten der Punkte  $P_3''$ ,  $P_4''$  im Koordinatensystem  $O\mathcal{E}H$  sind dieselben wie im Koordinatensystem  $O\mathcal{E}'H'$  und auch die Gleichung ( $\alpha$ ) gilt unverändert weiter. Die Gerade  $P_3''P_4''$  ist parallel zu  $P_1P_2$ . In dieser Weise ist die besprochene Tafel zu einer Tafel der Art §15A zurückgeführt. In ähnlicher Weise können wir vorgehen, wenn der Winkel zwischen zwei Geraden des Schnittsystems von  $90^\circ$  verschieden ist.

Wir sehen also, daß die Tabelle II sich auch für die Tafeln der besprochenen Art anwenden läßt. In einer gemäß der Tabelle II konstruierten Tafel der Art  $A$  drehen wir die Skalen  $\Phi_3''$ ,  $\Phi_4''$  und die Gerade  $P_3''P_4''$  um  $90^\circ$  um den Punkt  $O$ , wonach wir die Tabelle der Art  $B$  erhalten. Welche von diesen beiden Tafeln bequemer ist, hängt davon ab, ob größere Genauigkeit oder leichtere Ablesbarkeit erwünschter ist.

## § 16. Duale Nomogramme, Kurvenscharen.

Die in §§ 1 bis 7 behandelten Nomogramme gehen von einem System von drei auf einer Ebene befindlichen Geraden aus und befassen sich mit solchen drei Punkten dieser Geraden, die auf einer Geraden liegen. Diese Methode bleibt im Rahmen der deskriptiven (projektiven) Eigenschaften der geometrischen Elemente einer Ebene (dies trifft genau nur auf den Fall Nr. 4 der Tabelle I zu) und läßt, wie wir wissen, eine duale Transfiguration zu, die darin besteht, daß wir

- anstatt einer Geraden — einen Punkt,
- anstatt eines Punktes — eine Gerade,
- anstatt des Schnittpunktes zweier Geraden — die Verbindungslinie zweier Punkte,
- anstatt der Verbindungslinie zweier Punkte — den Schnittpunkt zweier Geraden,
- anstatt einer Geraden (aufgefaßt als Punktreihe) — einen Punkt (aufgefaßt als Strahlenbüschel)

zur Konstruktion benutzen. Wie wir erkennen, entspricht einer geraden Funktionsskala dual ein Funktionsstrahlenbüschel, und ebenso wie dort die Punkte vermittlels der Abstandsrelationen

aufgetragen wurden, zieht man hier die Strahlen gemäß den sich aus der Funktion ergebenden Winkelrelationen. Wenn wir eine solche Transformation an der nomographischen Tafel Fall Nr. 4, Tabelle I ausführen, so erhalten wir das Bild der Abb. 67. In jedem der drei Strahlenbüschel dieses Nomogramms ist jedem Strahl eine Zahl zugeordnet, z. B. einem Strahl des Strahlenbüschels mit Zentrum  $O_1$  derjenige Wert  $x'$  der Variablen  $x$ , für welchen die Funktion  $f_1(x)$  gleich dem Winkel ist, den der betreffende Strahl mit einer festen Geraden, z. B. mit

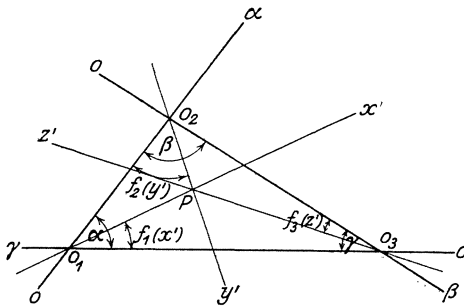


Abb. 67.

der Geraden  $O_3O_1$ , bildet. Falls der Punkt  $P$  der Schnittpunkt der Strahlen  $x'$ ,  $y'$  ist und der durch ihn gehende Strahl des dritten Strahlenbüschels die Bezeichnung  $z'$  trägt, so ist  $z'$  der Wert von  $z$ , der sich ergibt, wenn wir in der Gleichung

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

$$x = x', \quad y = y'$$

setzen. Wenn wir die Bezeichnungen der Abb. 67 wählen, erhalten wir für einen beliebigen Punkt  $P$  allgemein

$$\frac{\sin f_1(x)}{\sin(\alpha - f_1)} \cdot \frac{\sin f_2(y)}{\sin(\beta - f_2)} \cdot \frac{\sin f_3(z)}{\sin(\gamma - f_3)} = 1. \quad (59)$$

Diese Gleichung stellt eine Abhängigkeit zwischen den Variablen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  dar, die durch das besprochene duale Nomogramm dargestellt werden kann. Durch die besondere Wahl der Konstanten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  erhält man die spezialisierten Typen der darstellbaren Funktion. Es entspricht z. B. der Fall Nr. 3 der Tabelle I dual einem Nomogramm aus drei Strahlenbüscheln, deren Zentren auf einer Geraden liegen.

Bei der praktischen Ausführung des besprochenen Punktdiagramms zeichnet man die drei Strahlenbüschel in verschiedenen Farben, wodurch die Ablesbarkeit erleichtert wird. Die Fälle Nr. 6 bis 8 der Tabelle I können wir ebenfalls einer dualen Transformation unterwerfen. Es entspricht einer Kurve, die als Punktreihe aufgefaßt ist, dieselbe Kurve als Enveloppe (Einhüllende) einer Geradenschar, deren jede Gerade diese Kurve tangiert. Außer in ganz speziellen Fällen haben so aufgebaute

Nomogramme keine praktische Bedeutung, da sie eine zu kleine Genauigkeit gewähren.

Eine andere Art von Punktdiagrammen (die jedoch ebenfalls geringe praktische Bedeutung besitzen und hier nur der Vollständigkeit halber angeführt werden) erhält man durch die Anwendung der sog. Plücker'schen Linienkoordinaten. Es ist nach Plücker:

Die Gleichung einer Geraden:

$$a_1 \bar{\xi} + a_2 \bar{\eta} + a_3 = 0;$$

die Koordinaten dieser Geraden, d. h. die negativen reziproken Abschnitte, die sie auf den Cartesischen Koordinatenachsen abschneidet:

$$\bar{\xi}_1 = \frac{a_1}{a_3}; \quad \bar{\eta}_1 = \frac{a_2}{a_3}.$$

Die Gleichung einer zur Ordinatenachse parallelen Geraden:

$$a_1 \bar{\xi} + a_3 = 0 \quad (\bar{\eta} = \text{beliebig}).$$

Die Koordinaten dieser Geraden:

$$\bar{\xi}_1 = \frac{a_1}{a_3}; \quad \bar{\eta}_1 = \frac{a_2}{a_3} = 0.$$

(Entsprechend für eine zur Abszissenachse parallele Gerade.)

Gleichung der unendlich fernen Geraden:

$$0 \cdot \bar{\xi} + 0 \cdot \bar{\eta} + a_3 = 0.$$

Koordinaten dieser Geraden:

$$\bar{\xi}_1 = 0, \quad \bar{\eta}_1 = 0.$$

Die Gleichung eines Punktes<sup>1)</sup>:

$$A_1 \dot{\xi} + A_2 \dot{\eta} + A_3 = 0;$$

die Koordinaten dieses Punktes, d. h. die parallel zur Koordinatenachse gemessenen Abstände von den beiden Cartesischen Koordinatenachsen:

$$\dot{\xi}_1 = \frac{A_1}{A_3}; \quad \dot{\eta}_1 = \frac{A_2}{A_3}.$$

Die Gleichung eines auf der Abszissenachse liegenden Punktes:

$$A_1 \dot{\xi} + A_3 = 0 \quad (\dot{\eta} = \text{beliebig}).$$

Die Koordinaten dieses Punktes:

$$\dot{\xi}_1 = \frac{A_1}{A_3}; \quad \dot{\eta}_1 = \frac{A_2}{A_3} = 0.$$

(Entsprechend für einen auf der Ordinatenachse liegenden Punkt.)

Gleichung des Nullpunktes des Koordinatensystems:

$$O \cdot \dot{\xi} + O \cdot \dot{\eta} + A_3 = 0.$$

Koordinaten dieses Punktes:

$$\dot{\xi}_1 = 0, \quad \dot{\eta}_1 = 0.$$

<sup>1)</sup> Diese Gleichung besagt, daß jede Gerade, deren Koordinaten  $\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1$  der Gleichung  $A_1 \bar{\xi}_1 + A_2 \bar{\eta}_1 + A_3 = 0$  genügen, durch diesen Punkt geht. Siehe weiter unten die Bedingung des Ineinanderliegens.

Gleichung einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden:

$$a_1 \bar{\xi} + a_2 \bar{\eta} = 0.$$

Koordinaten dieser Geraden

$$\bar{\xi}_1 = \infty; \quad \bar{\eta}_1 = \infty.$$

Bedingung dafür, daß der Punkt  $\bar{\xi}_1 \bar{\eta}_1$  auf der Geraden  $\bar{\xi}_1 \bar{\eta}_1$  liegt:

Gleichung eines unendlich fernen Punktes:

$$A_1 \dot{\xi} + A_2 \dot{\eta} = 0.$$

Koordinaten dieses Punktes

$$\dot{\xi}_1 = \infty; \quad \dot{\eta}_1 = \infty.$$

Bedingung dafür, daß die Gerade  $\bar{\xi}_1 \bar{\eta}_1$  durch den Punkt  $\dot{\xi}_1 \dot{\eta}_1$  hindurchgeht:

$$\dot{\xi} \cdot \bar{\xi}_1 + \dot{\eta}_1 \cdot \bar{\eta}_1 + 1 = 0$$

(Bedingung des Ineinanderliegens).

Die Bedingung, daß sich drei Gerade mit den Koordinaten  $\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1; \bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2; \bar{\xi}_3, \bar{\eta}_3$  in einem Punkte schneiden, ist

$$\bar{\eta}_1 (\bar{\xi}_3 - \bar{\xi}_2) + \bar{\eta}_2 (\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_3) + \bar{\eta}_3 (\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1) = 0.$$

Mittels dieser Relationen können wir sämtliche Fälle der Tabelle I umformen in entsprechende Punktdiagramme. Die Resultate dieser Umformung für die ersten vier Fälle sind in der Abb. 68 zusammengestellt. Wir ersehen aus ihr, daß der Fall Nr. 3 sich vom Fall Nr. 1 und der Fall Nr. 4 vom Fall Nr. 2 nur durch eine veränderte Lage bezüglich der Koordinatenachsen unterscheiden.

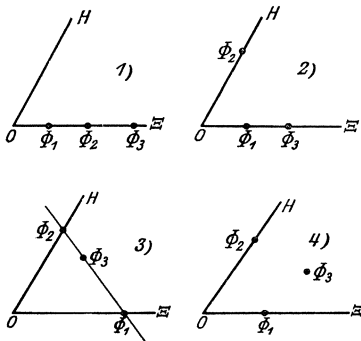


Abb. 68.

Im wesentlichen existieren nur zwei Fälle, und zwar

- A. die drei Zentren des Strahlenbündchels liegen auf einer Geraden;
- B. die drei Zentren des Strahlenbündchels liegen nicht auf einer Geraden.

Sie sind in der Tabelle III gegenübergestellt. Dabei sind im Falle B die Koordinatenachsen parallel zu den Geraden  $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_3$  bzw.  $\bar{\Phi}_2, \bar{\Phi}_3$  gewählt.

Da die beiden hier auftretenden typischen Formen auch in der Tabelle I

enthalten sind, die in der Benützung einfacher und übersichtlicher ist, so werden die hier entwickelten Plücker'schen Nomogramme kaum jemals praktisch benutzt.

Die Umformung des Falles Nr. 5 ergibt ein Nomogramm mit zwei Strahlenbündcheln und einer Geradenschar, deren Einhüllende dieselbe Kurve wie im d'Ocagne-Nomogramm ist.



Tabelle III.

Nr.	Schema	Gleichungen der Zentren der Skalenbüschel			Koordinaten der Zentren der Skalenbüschel, darunter: Koordinaten der Büschelgeraden						Normalform, darunter: Typische Form
		$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	
A		$\xi_1 = k_1$	$\xi_2 = k_2$	$\xi_3 = k_3$	$\xi_1 = 0$ $\eta_1 = -\frac{1}{k_1}$	$\xi_2 = 0$ $\eta_2 = -\frac{1}{k_2}$	$\xi_3 = 0$ $\eta_3 = -\frac{1}{k_3}$	$\eta_1 = -\frac{1}{f_1}$	$\eta_2 = -\frac{1}{f_2}$	$\eta_3 = -\frac{1}{f_3}$	$(k_2 - k_3) f_2 f_3 + (k_3 - k_1) f_1 f_3 + (k_1 - k_2) f_1 f_2 = 0$ $\psi_1 \psi_2 + \psi_2 \psi_3 + \psi_3 \psi_1 = 0$
B		$\xi_1 = k_1$	$\eta = k_2$	$k_2 \xi_3 + k_1 \eta_3 = k_1 k_2$	$\xi_1 = 0$ $\eta_1 = -\frac{1}{k_1}$	$\xi_2 = 0$ $\eta_2 = -\frac{1}{k_2}$	$\xi_3 = 0$ $\eta_3 = -\frac{1}{k_3}$	$\eta_1 = -\frac{1}{f_1}$	$\eta_2 = -\frac{1}{f_2}$	$\eta_3 = -\frac{1}{f_3}$	$k_1 F_2 - k_1 F_3 - k_2 f_1 - k_3 k_2 f_3 F_3 = 0$ $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_1 \psi_2 \psi_3 = 0$

**Kurvenscharen.**

Die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 F(\xi, \eta, x) &= 0, \\
 f(\xi, \eta, y) &= 0, \quad (60) \\
 \varphi(\xi, \eta, z) &= 0,
 \end{aligned}$$

worin  $\xi, \eta$  Cartesische Koordinaten und  $x, y, z$  veränderliche Parameter bedeuten, stellen drei Kurvenscharen in der  $\xi, \eta$ -Ebene dar, indem z. B. die erste Gleichung für jeden Wert von  $x$  eine andere Kurve darstellt. Sind zwei Parameter, z. B.  $x$  und  $y$  festgelegt, so kann man aus den entsprechenden Kurven

$$\begin{aligned}
 F(\xi, \eta, x_1) &= 0, \\
 f(\xi, \eta, y_1) &= 0
 \end{aligned}$$

die Unbekannten  $\xi$  und  $\eta$  (Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Kurven) errechnen. Sie seien

$$\xi = \xi_1; \quad \eta = \eta_1;$$

setzt man sie in die Gleichung der dritten Kurvenschar ein, so erhält man aus

$$\varphi(\xi_1 \eta_1 z) = 0$$

den Wert

$$z = z_1;$$

mit anderen Worten: Die durch den Schnittpunkt der beiden ersten Kurven gehende Kurve der dritten Kurvenschar besitzt den Parameter  $z_1$ .

Wir können somit mittels dreier Kurvenscharen eine Abhängigkeit zwischen drei Variablen  $x, y, z$ , die durch drei Gleichungen (60) ausgedrückt ist, darstellen. Diese Gleichungen umfassen fünf Veränderliche, wovon zwei eliminierbare Parameter sind und haben die Besonderheit, daß die drei anderen Veränderlichen einzeln in jeder Gleichung vorkommen.

Wir wollen den Spezialfall betrachten, wenn zwei Kurvenscharen parallele Geraden sind. Es werden jetzt die Gleichungen (60) zu

$$\begin{aligned} F(\xi, x) &= 0, \\ f(\eta, y) &= 0, \\ \varphi(\xi, \eta, z) &= 0. \end{aligned} \tag{61}$$

Wenn wir aus diesen drei Gleichungen  $\xi$  und  $\eta$  eliminieren, so erhalten wir eine Funktion

$$T(x, y, z) = 0.$$

Wir ersehen daraus die bekannte Tatsache, daß wir mittels dieses speziellen Falles des Kurvenscharnomogramms sämtliche Funktionen dreier Variablen darstellen können.

Beispiele:

1. Durch eine Schar paralleler Geraden wird die Gleichung

$$\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 = 0$$

dargestellt.

2. Strahlenbüschel (Zentrum im Koordinatenanfang):

$$\Psi_1 \Psi_2 = \Psi_3.$$

3. Eine Schar konzentrischer Kreise (Mittelpunkt = Koordinatenanfang):

$$\Psi_1^2 + \Psi_2^2 = \Psi_3^2.$$

Auch die Kurvenscharnomogramme lassen sich dual und nach Plücker'scher Weise transfigurieren, dies besitzt jedoch keine praktische Bedeutung.

## § 17. Metrische Nomogramme.

Wenn wir den Begriff des Nomogramms erweitern und darunter eine graphische Konstruktion oder ein System von Konstruktionen verstehen, das uns erleichtern soll, eine oft vorkommende Funktion auszuwerten, so können wir eine große Zahl von metrischen Relationen der Geometrie zur Aufstellung von bequemen Rechentafeln verwerten. Die in Frage kommenden metrischen Relationen sind

- I. Gleichheit der Felder,
- II. „ „ Winkel und die ihr dual entsprechende
- III. „ „ Strecken.

Nun besitzen wir keine bequemen, einfachen und jedermann zugänglichen Vorrichtungen, um die Felder von gerad- und krummlinigen Figuren leicht zu messen und zu vergleichen. Daher kommt im großen und ganzen die Relationsart I für Nomogramme nicht in Betracht. Aber auch die Messung der Winkel ist unvollkommen und ungenau. Es verbleibt somit als Grundlage für unsere Nomogramme die Relationsart III. Je nachdem, wie die Streckenmessung am einfachsten geschehen kann, unterteilen wir die Rechentafeln in

A. Nomogramme mit beweglicher Skala und

B. Stechzirkelnomogramme.

A. Durch diese Nomogramme lassen sich die Funktionen dreier Veränderlichen darstellen.

1. Das Nomogramm besteht aus einer Skala und einer Kurve (wenigstens zweiter Ordnung); durch den Schnitt mit einer Geraden (bewegliche Skala) werden auf derselben zwei Strecken markiert, die in gewisser Abhängigkeit voneinander stehen. Das einfachste Beispiel dafür ist Abb. 69. Sie stellt die Funktion

$$y = x + \frac{a}{x} \quad \text{für } a = 500 \text{ bis } 2500 \text{ und } x \leq 100$$

dar. Wir stellen das in Millimeter geteilte Lineal so, daß es durch den dem Wert von  $a$  entsprechenden Punkt  $B$  hindurchgeht und daß dessen Teilstrich „ $O$ “ auf der Peripherie des Kreises im Punkt  $A$  in der Weise liegt, daß die Strecke  $AB$  gleich dem jeweiligen Wert von  $x$  ist. Jetzt können wir im zweiten Schnittpunkt  $C$  des Kreises mit dem Lineal auf demselben unmittelbar den Wert von  $y$  ablesen

$$\text{Probe: } y = 49 + \frac{1700}{49} = 84.$$

2. Auf einer beweglichen (geradlinigen) Skala wird die Funktion des Abstandes der Punkte abgelesen, die zwei Skalen angehören.

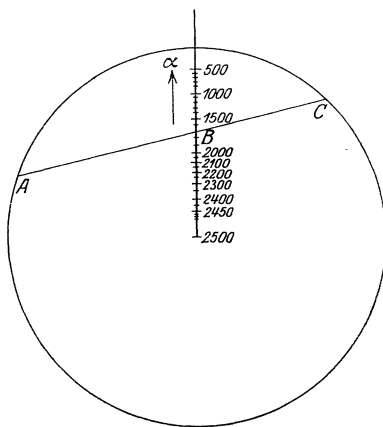


Abb. 69. 0,5 natürl. Größe.

Tabelle IV.

Nr.	Schema	Koordinatenachsen		Gleichungen der Skalen				Normalform	Bemerkung
		$O\varepsilon$	$OH$	$\Phi_1$		$\Phi_2$			
				$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$		
1		$\perp \Phi_1$	$\Phi_1$	0	$f_1$	$k_1$	$f_2$	$(f_1 - f_2)^2 + k_1^2 = F_3^2$	
2		$\perp \Phi_1$	$\Phi_1$	„	„	0	„	$f_1 - f_2 = F_3$	
3		$\Phi_2$	$\Phi_1$	„	„	$F_2$	0	$f_1^2 + f_2^2 - 2 f_1 f_2 \cos \omega = F_3^2$	
4		$\perp \Phi_1$	$\Phi_1$	„	„	„	$f_2$	$(f_2 - f_1)^2 + F_2^2 = F_3^2$	
5		beliebig	$F_1$	„	„	„	„	$(f_2 - f_1)^2 + (F_2 - F_1)^2 = F_3^2$	

Die Tabelle IV, die nach dem vorigen ohne weiteres verständlich ist, bringt die Zusammenstellung sämtlicher vorkommenden Fälle. Dabei bedeutet  $F_3$  die bewegliche Skala. Durch andere Wahl der Koordinatenachsen im Falle Nr. 3 dieser Tabelle — nämlich

$$OH = \Phi_1, \quad O\varepsilon = \perp \Phi,$$

wobei  $\xi_2 = F_2$ ,  $\eta_2 = k_2 F_2$  ist, erhält die Normalgleichung die Form

$$(f_1 - k_2 F_2)^2 + F_2^2 = F_3^2.$$

Im Falle Nr. 5 können die beiden krummlinigen Skalen auch zusammenfallen. Ein Beispiel dafür ist Abb. 70, die zwei zusammengefallene gleiche elliptische Skalen

$$\xi = a \cos x, \quad \eta = b \sin x$$

$$\text{bzw. } \xi = a \cos y, \quad \eta = b \sin y$$

darstellt. Die Länge der  $x - y$ -Strecke (Ellipsensehne), die auf der beweglichen Skala abgelesen wird, ist

$$z = \sqrt{a^2 (\cos x - \cos y)^2 + b^2 (\sin x - \sin y)^2},$$

also im Falle der Abb. 70

$$z = \sqrt{60^2 (\cos 60 - \cos 165)^2 + 30^2 (\sin 60 - \sin 165)^2} = 90.$$

Was die Maßstäbe anbetrifft, so muß für die Tabelle IV

$$\mu(f_1) = \mu(f_2) = \mu(F_1) = \mu(F_2) = \mu(F_3) \quad (62)$$

sein.

**B. Stechzirkelnomogramme.**

Mittels Stechzirkel wird der Abstand zweier Punkte abgegriffen, die zwei Skalen angehören. Die Spitze des Zirkels wird auf der dritten Skala in dem Punkte, der der dritten Variablen entspricht, eingestellt und es wird auf der vierten Skala mittels des Stechzirkels der Punkt aufgesucht, der vom dritten denselben Abstand besitzt wie die beiden ersten voneinander. Auf

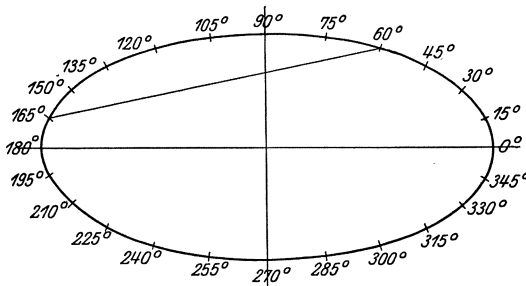


Abb. 70. 0,5 natürl. Größe.

diese Weise können wir Funktionen von vier Variablen darstellen. Um die zueinander gehörenden Skalen anzudeuten, kann man das Nomogramm zwei- (oder mehr-) farbig gestalten.

Tabelle V, deren nähere Beschreibung überflüssig ist, bringt die Zusammenstellung sämtlicher Fälle. In den Fällen Nr. 4, 5, 6, 9, 13 können die Koordinaten, wie auf S. 80 besprochen, gewählt werden, wobei die Normalgleichung die dort angeführte Form erhält.

Auch hier ist das Zusammenfallen zweier krummliniger Skalen möglich. Sämtliche Maßstäbe müssen, wie oben in § 17 A, gleich gewählt werden (diese Bedingung macht sich oft bei der Konstruktion unangenehm bemerkbar).

Beispiel: In den Abb. 71 und 72 ist die in der Festigkeitslehre oft angewendete Gleichung

$$d = \sqrt[3]{\frac{32000}{\pi} \cdot \frac{1}{k_b} (0,35 M_b + 0,65 \sqrt{M_b^2 + \alpha^2 M_d^2})}$$

dargestellt, und zwar in der Abb. 71 mittels Anwendung der Methode der parallelen Geraden, in Abb. 72 mittels Anwendung der Fluchtgeraden und Stechzirkelmethode.

Tabelle V.

Nr.	Schema	I. Koordinatensystem		II. Koordinatensystem		Gleichungen der Skalen.							
		OΞ	OH	OΞ	OH	Φ <sub>1</sub>		Φ <sub>2</sub>		Φ <sub>3</sub>		Φ <sub>4</sub>	
						ξ <sub>1</sub>	η <sub>1</sub>	ξ <sub>2</sub>	η <sub>2</sub>	ξ <sub>3</sub>	η <sub>3</sub>	ξ <sub>4</sub>	η <sub>4</sub>
1		⊥ Φ	Φ <sub>1</sub>	⊥ Φ <sub>3</sub>	Φ <sub>3</sub>	0	f <sub>1</sub>	0	f <sub>2</sub>	0	f <sub>3</sub>	0	f <sub>4</sub>
2		„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„
3		„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„
4		Φ <sub>2</sub>	„	„	„	„	„	F <sub>2</sub>	0	„	„	„	„
5		„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„
6		„	„	Φ <sub>4</sub>	„	„	„	„	„	„	„	F <sub>4</sub>	0
7		⊥ Φ <sub>1</sub>	„	⊥ Φ <sub>3</sub>	„	„	„	0	f <sub>2</sub>	„	„	„	f <sub>4</sub>
8		„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„
9		Φ <sub>2</sub>	„	„	„	„	„	F <sub>2</sub>	0	„	„	„	„
10		⊥ Φ <sub>1</sub>	„	„	„	„	„	„	f <sub>2</sub>	„	„	„	„
11		„	„	beliebig	„	„	„	0	„	F <sub>3</sub>	„	„	„
12		„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„
13		Φ <sub>2</sub>	„	„	„	„	„	F <sub>2</sub>	0	„	„	„	„
14		⊥ Φ <sub>1</sub>	„	„	„	„	„	„	f <sub>2</sub>	„	„	„	„
15		beliebig	„	„	„	F <sub>1</sub>	„	„	„	„	„	„	„

Tabelle V.

Normalgleichung	Bemerkung
$(f_1 - f_2)^2 + k_{12}^2 = (f_3 - f_4)^2 + k_{34}^2$	
$(f_1 - f_2)^2 = (f_3 - f_4)^2 + k_{34}^2$	
$f_1 - f_2 = \pm (f_3 - f_4)$	
$f_1^2 + F_2^2 - 2 f_1 F_2 \cos \omega_{12} = (f_3 - f_4)^2 + k_{34}^2$	s. S. 80
$f_1^2 + F_2^2 - 2 f_1 F_2 \cos \omega_{12} = (f_3 - f_4)^2$	s. S. 80
$f_1^2 + F_2^2 - 2 f_1 F_2 \cos \omega_{12} = f_3^2 + F_4^2 - 2 f_3 F_4 \cos \omega_{34}$	s. S. 80
$(f_1 - f_2)^2 + k_{12}^2 = (f_3 - f_4)^2 + F_4^2$	
$(f_1 - f_2)^2 = (f_3 - f_4)^2 + F_4^2$	
$f_1^2 + F_2^2 - 2 f_1 F_2 \cos \omega_{12} = (f_3 - f_4)^2 + F_4^2$	s. S. 80
$(f_1 - f_2)^2 + F_2^2 = (f_3 - f_4)^2 + F_4^2$	
$(f_1 - f_2)^2 + k_{12}^2 = (f_3 - f_4)^2 + (F_3 - F_4)^2$	
$(f_1 - f_2)^2 = (f_3 - f_4)^2 + (F_3 - F_4)^2$	
$f_1^2 + F_2^2 - 2 f_1 F_2 \cos \omega_{12} = (f_3 - f_4)^2 + (F_3 - F_4)^2$	s. S. 80
$f_1^2 + (F_1 - F_2)^2 - (f_3 - f_4)^2 + (F_3 - F_4)^2$	
$(f_1 - f_2)^2 + (F_1 - F_2)^2 = (f_3 - f_4)^2 + (F_3 - F_4)^2$	

Wir setzen für das erste Teilnomogramm der Tafel Abb. 71

$$f_1 = 0,65^2 M_b^2; \quad f_2 = (M_i - 0,35 M_b)^2 = N^2;$$

$$f_3 = \alpha^2; \quad F_4 = \frac{1}{M_d^2}; \quad k_2 = -0,65^2$$

und erhalten damit die Normalgleichung des Falles Nr. 5 (Tabelle II), die wir mit

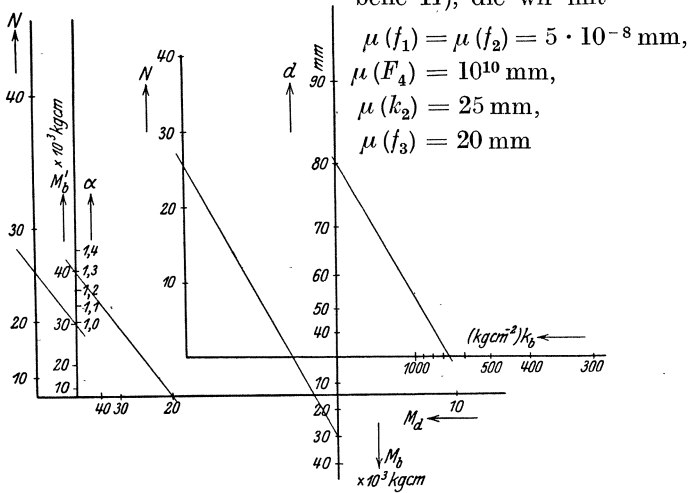


Abb. 71. 0,5 natürl. Größe.

konstruieren. In der resultierenden Gleichung

$$\frac{d^3}{1000} = \frac{32}{\pi k_b} (N + 0,35 M_b)$$

setzen wir

$$f_1^2 = -0,35 M_b; \quad f_2 = N; \quad f_3 = \frac{d^3}{1000};$$

$$F_4 = \frac{32}{\pi k_b}; \quad k_2 = -1$$

und führen sie dadurch wieder auf die Normalgleichung des Falles Nr. 5 (Tabelle II) zurück. Wir benutzen zur Konstruktion die Maßstäbe

$$\begin{aligned} \mu(f_1) &= \mu(f_2) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mm}; & \mu(f_3) &= 0,1 \text{ mm}, \\ \mu(F_4) &= 2000 \text{ mm}; & \mu(k_2) &= 40 \text{ mm}. \end{aligned}$$



In der Abb. 71 ist eingezeichnet der Spezialfall mit

$$\alpha = 1,3; \quad M_d = 10000 \text{ kg/cm}; \quad M_b = 30000 \text{ kg/cm};$$

$$k_b = 700 \text{ kg/cm}^2;$$

es ist für diesen Fall

$$N = 25400$$

$$d = 80,5 \text{ mm.}$$

In der Abb. 72 setzen wir

$$f_1 = 0,65 M_d; \quad f_2 = \alpha,$$

$$f_3 = 0,65 M_d \alpha = P$$

und erhalten mit

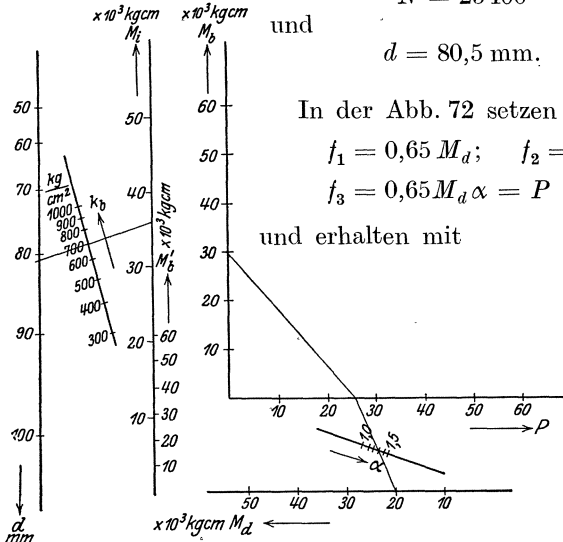


Abb. 72. 0,5 natürl. Größe.

$$\mu(M_d) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mm}, \quad \mu(f_2) = h \mu(h) = 30 \text{ mm},$$

$$\mu(f_3) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

die erste Teilmultiplikationstafel (Tabelle I, Fall Nr. 2). Unter Anwendung der Tabelle V, Fall Nr. 5 tragen wir auf der zu  $P$  senkrechten Geraden die Skala  $0,65 M_b$  mit

$$\mu(M_b) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

auf und greifen den jeweiligen Abstand zwischen Punkten der Skalen  $P$  und  $M_b$  mit Stechzirkel ab. Wenn wir nun eine Spitze des Zirkels in einen Punkt der  $M'_b$ -Skala (die die Funktion  $0,35 M'_b$  mit  $\mu(M_b) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$  darstellt) stellen, so lesen wir an der zweiten Spitze des im Sinne der Addition gelegten Zirkels den Wert von

$$M_i = 0,35 M_b + 0,65 \sqrt{M_b^2 + \alpha^2 M_d^2}$$

ab.

Mit Hilfe einer Multiplikationstafel (Tabelle I, Fall Nr. 2) erhalten wir mit

$$f_3 = M_i; \quad f_2 = \frac{\pi k_2}{1000 \cdot 32}; \quad f_1 = d^3;$$

$$\mu(f_3) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mm}; \quad \mu(f_2) = 750 \text{ mm}; \quad \mu(f_1) = 10^{-4} \text{ mm};$$

$$h\mu(h) = 37,5 \text{ mm}$$

den Wert von  $d$ .

In der Abbildung ist der gleiche Spezialfall wie in der Abb. 71 eingezeichnet.

Wenn wir die beiden Methoden vergleichen, so bemerken wir, daß beide mit gleicher Zahl an Hilfsmitteln (die erste: 2 Lineale, die zweite: 1 Lineal und 1 Zirkel) arbeiten und beide ungefähr gleich genaue Resultate liefern. Auch sind beide in bezug auf die praktische Anwendung gleich bequem.

Im allgemeinen zeichnet sich die Stechzirkelmethode durch etwas größere Genauigkeit aus. Ihr Nachteil ist die auf S. 81 hervorgehobene Starrheit der Maßstäbe.

Durch Kombination der Stechzirkelmethode mit Kurvenschartafeln können, wie man leicht erkennt, Funktionen bis zu acht Veränderlichen dargestellt werden. Die entsprechenden Gleichungen können ohne weiteres aufgestellt werden, solche Tafeln werden jedoch selten praktisch benutzt.

---

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

---

## Die Herstellung gezeichneter Rechentafeln

Ein Lehrbuch der Nomographie

Von

Dr.-Ing. Otto Laemann

Mit 68 Abbildungen im Text und auf 3 Tafeln. 1923

GZ. 3 / § 0.75

### Inhaltsübersicht:

I. Zur Einführung. — II. Die Funktionsskalen und ihre Herstellung. — III. Gezeichnete Rechentafeln für Gleichungen mit zwei Veränderlichen. — A. Rechentafeln mit Linienkreuzung. — B. Fluchtlinientafeln. — C. Rechentafeln mit vereinigten Skalen. — IV. Gezeichnete Rechentafeln für Gleichungen mit drei Veränderlichen. — A. Rechentafeln mit Linienkreuzung. — B. Fluchtlinientafeln. — C. Rechentafeln mit Punkten gleichen Abstandes. Rechenstäbe. — V. Gezeichnete Rechentafeln für Gleichungen mit vier und mehr Veränderlichen. — A. Rechentafeln mit Linienkreuzung. — B. Verhältnistafeln. — C. Fluchtlinientafeln. — VI. Räumliche Rechenmodelle. — Schriftennachweis. — Sonderverzeichnis der Beispiele.

---

## Die Nomographie oder Fluchtlinienkunst

Ein technischer Leitfaden

Von

Fritz Krauß, Ingenieur in Wien

Mit 26 Textfiguren. 1922

GZ. 1.8 / § 0.45

### Aus den Besprechungen:

In dem vorliegenden Büchlein hat sich der Verfasser die Aufgabe gestellt, ein Teilgebiet der Nomographie, nämlich die Fluchtlinientafeln, unter tunlichster Vermeidung aller für eine eingehende Behandlung des Problems notwendigen mathematischen Erörterungen möglichst elementar darzustellen. In anschaulicher Weise lernt der Leser die üblichen Fluchtlinientafeln für drei und mehr Veränderliche, mit geraden, gekrümmten und gitterförmigen Skalenträgern kennen. Die erläuternden Beispiele sind teils dem Gebiete der Mathematik, teils dem der Physik, des Maschinenbaues und der Heizungstechnik entnommen. . .

„Maschinenbau/Gestaltung“, 1922/23, Heft 10.

---

## Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln

Von

Prof. Dr.-Ing. P. Werkmeister

Privatdozent an der Technischen Hochschule in Stuttgart

Mit 163 Textabbildungen

Erscheint Ende Herbst 1923

---

*Die Grundzahlen (GZ.) entsprechen den ungefähren Vorkriegspreisen und ergeben mit dem jeweiligen Entwurfungsfaktor (Umrechnungsschlüssel) vielfach den Verkaufspreis. Über den zur Zeit geltenden Umrechnungsschlüssel geben alle Buchhandlungen sowie der Verlag bereitwilligst Auskunft.*

**Lehrbuch der darstellenden Geometrie.** Von Dr. W. Ludwig, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. In drei Teilen.  
Erster Teil: Das rechtwinklige Zweifafelsystem. Vielfache, Kreis, Zylinder, Kugel. Mit 58 Textfiguren. 1919. GZ. 4.5; § 1.10  
Zweiter Teil: Das rechtwinklige Zweifafelsystem. Kegelschnitte, Durchdringungskurven, Schraubenlinie. Mit 50 Textfiguren. 1922. GZ. 4.5; § 1.10  
Dritter Teil: In Vorbereitung

**Ingenieur-Mathematik.** Lehrbuch der höheren Mathematik für die technischen Berufe. Von Dr.-Ing. Dr. phil. Heinz Egerer, Dipl.-Ingenieur, vormals Professor für Ingenieur-Mechanik und Materialprüfung an der Technischen Hochschule Drontheim.  
Erster Band: **Niedere Algebra und Analysis.** — Lineare Gebilde der Ebene und des Raumes in analytischer und vektorieller Behandlung. — Kegelschnitte. Mit 320 Textabbildungen und 575 vollständig gelösten Beispielen und Aufgaben Unveränderter Neudruck. Gebunden GZ. 12; gebunden § 3  
Zweiter Band: **Differential- und Integralrechnung.** — Reihen und Gleichungen. — Kurvendiskussion. — Elemente der Differentialgleichungen. — Elemente der Theorie der Flächen- und Raumkurven. — Maxima und Minima. Mit 477 Abbildungen und über 1000 vollständig gelösten Beispielen und Aufgaben. 1922. Gebunden GZ. 17; gebunden § 4.10  
Dritter Band: **Gewöhnliche Differentialgleichungen.** — Flächen. — Raumkurven. — Partielle Differentialgleichungen. — Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung. — Fouriersche Reihen usw. In Vorbereitung.

**Technische Schwingungslehre.** Ein Handbuch für Ingenieure, Physiker und Mathematiker bei der Untersuchung der in der Technik angewendeten periodischen Vorgänge. Von Dipl.-Ing. Dr. Wilhelm Hort, Oberingenieur bei der Turbinenfabrik der AEG, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Berlin. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage. Mit 423 Textfiguren. 1922. Gebunden GZ. 20; gebunden § 4.80

**Weickert-Stolle, Praktisches Maschinenrechnen.** Die wichtigsten Erfahrungswerte aus der Mathematik, Mechanik, Festigkeits- und Maschinenlehre in ihrer Anwendung auf den praktischen Maschinenbau.  
I. Teil: **Elementar-Mathematik.** Eine leichtfaßliche Darstellung der für Maschinenbauer und Elektrotechniker unentbehrlichen Gesetze von A. Weickert, Oberingenieur und Lehrer an höheren Fachschulen für Maschinenbau und Elektrotechnik.  
Erster Band: **Arithmetik und Algebra.** Neunte, durchgesehene und vermehrte Auflage. 1921. GZ. 1.5; gebunden GZ. 2 / § 0.40; gebunden § 0.50  
Zweiter Band: **Planimetrie.** Zweite, verbesserte Auflage. Mit 348 Textabbildungen. 1922. GZ. 4; gebunden GZ. 4.7 / § 1; gebunden § 1.20  
Dritter Band: **Trigonometrie.** Zweite, verbesserte Auflage. Mit 106 Textabbildungen. 1923. GZ. 2.75; gebunden GZ. 3.75 / § 0.60; gebunden § 0.80  
Vierter Band: **Stereometrie.** Zweite, verbesserte Auflage. Mit 90 Textabbildungen. Erscheint im Herbst 1923

**Der praktische Maschinenbauer.** Ein Lehrbuch für Lehrlinge und Gehilfen, ein Nachschlagewerk für den Meister. Herausgegeben von Dipl.-Ing. H. Winkel.  
Erster Band: **Werkstattausbildung.** Von August Lauffer, Meister der Württembergischen Staatseisenbahn. Mit 100 Textfiguren. 1921. Gebunden GZ. 4; gebunden § 0.90  
Zweiter Band: **Die wissenschaftliche Ausbildung.** I. Teil: **Mathematik und Naturwissenschaft.** Bearbeitet von R. Kramm, K. Rugg und H. Winkel. Mit 369 Textfiguren. 1923. Gebunden GZ. 7; gebunden § 1.60  
II. Teil: **Fachzeichnen, Maschinenteile, Technologie.** Bearbeitet von W. Bender, H. Frey, K. Gotthold und H. Guttwein. Mit 887 Textfiguren. Erscheint im Herbst 1923

*Die Grundzahlen (GZ.) entsprechen den ungefähren Vorkriegspreisen und ergeben mit dem jeweiligen Entwertungsfaktor (Umrechnungsschlüssel) vervielfacht den Verkaufspreis. Über den zur Zeit geltenden Umrechnungsschlüssel geben alle Buchhandlungen sowie der Verlag bereitwilligst Auskunft.*